数学(二)(文科)参考答案

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(**1**)C　(**2**)D　【解析】由复数相等的充要条件,得$\begin{cases}x=-1\\-y=-1\end{cases}$,解得$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$则$(1+i)^{y-x}=(1+i)^2=2i$.

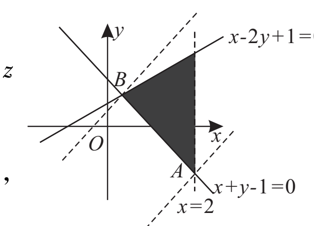
(**3**)C　【解析】当 $x>1$ 时,可以推出$\frac{1}{x-1}>0$;当$\frac{1}{x-1}>0$ 时,也可以推出 $x>1$,故命题“$x>1$”是命题“$\frac{1}{x-1}>0$”的充要条件.

(**4**)C　【解析】向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为$|\boldsymbol{a}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{(-1,2)\cdot(3,6)}{\sqrt{3^2+6^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

(**5**)A　【解析】由题意,双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1(a\neq0)$的渐近线斜率为$\frac{\sqrt{3}|a|}{|a|}=\sqrt{3}$,则其倾斜角为 60°. 故双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1(a\neq0)$的渐近线与虚轴所在的直线的夹角为 $90°-60°=30°$.

(**6**)D　【解析】因为 $a=3^{\frac{1}{2}}>1, b=\log_{\frac{1}{2}}3<0, 0<c=\left(\frac{1}{2}\right)^3<1$,所以 $b<c<a$.

(**7**)A　【解析】画出约束条件$\begin{cases}x-2y+1\geqslant0\\x<2\\x+y-1\geqslant0\end{cases}$表示的可行域如图阴影区域,由 $z=3x-4y+3$,得 $y=\frac{3}{4}x+\frac{3-z}{4}$. 平移直线 $y=\frac{3}{4}x$,当经过点 $A(2,-1)$时,$B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$代入 z,得 z 的取值分别为 13,$\frac{4}{3}$,所以 $z\in\left[\frac{4}{3},13\right)$.



(**8**)D　【解析】函数$f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象向右平移关于$\frac{\pi}{3}$个长度单位,得到函数$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$. 由题意,函数$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$在 $x=\frac{\pi}{6}$处取得最小值,所以$\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\omega=-12k+\frac{9}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 故当 $k=0$ 时,ω 取得最小正值$\frac{9}{2}$.

(**9**)B　【解析】由三视图可知,该几何体是某个圆柱的$\frac{1}{3}$,且圆柱的高为 4,设圆柱的底面圆半径为 r,则 $r+r\cos60°=3$,解得 $r=2$. 故该几何体的表面积是 $S=\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times2+2\times4+2\times4+2\pi\times2\times4\times\frac{1}{3}=16+8\pi$.

(**10**)B　【解析】$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$,令 $f'(x)=-\frac{1}{4}$,得 $x=\pm2$,故切点为$\left(2,\frac{1}{2}\right)$或$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$. 当切点为$\left(2,\frac{1}{2}\right)$时,代入 $y=-\frac{1}{4}x+b$ 中,求得 $b=1$;此时,直线 $y=-\frac{1}{4}x+1$ 与坐标轴的交点分别是(0,1),(4,0),则所围成的三角形的面积是 $S=\frac{1}{2}\times1\times4=2$;当切点为时$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$,代入 $y=-\frac{1}{4}x$

$+b$ 中,求得 $b=-1$,此时,直线 $y=-\frac{1}{4}x-1$ 与坐标轴的交点分别是 $(0,-1)$,$(-4,0)$,则所围成的三角形的面积是 $S=\frac{1}{2}\times|-1|\times|-4|=2$. 综上,直线 $y=-\frac{1}{4}x+b$ 与坐标轴所围成的三角形的面积是 2.

二、填空题:本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

(**11**)16 【解析】设青年职工应抽取 x 人,则由分层抽样的特点,得 $\frac{x}{240}=\frac{60}{900}$,解得 $x=16$. 故青年职工应抽取的人数为 16.

(**12**)2 【解析】$f(2^{-3})=f(2^{-3}\cdot 2)=f(2^{-2})=f(2^{-2}\cdot 2)=f(2^{-1})=\cdots=f(2^2)=\log_2 4=2$.

(**13**)-1 或 $-\frac{1}{2}$ 或 16 【解析】当 $x\leqslant -1$ 时,由 $x^2+2x+5=4$,得 $x=-1$;当 $-1<x\leqslant 5$ 时,由 $2-4x=4$,得 $x=-\frac{1}{2}$;当 $x>5$ 时,由 $\log_2 x=4$,得 $x=16$;综上,输入的 x 的值为 -1 或 16.

(**14**)$\frac{1}{6}$ 【解析】要使 $\triangle ABC$ 恰有两解,需满足的条件是 $b\sin A<a<b$,因为 $A=\frac{\pi}{6}$,所以 $\frac{b}{2}<a<b$. 又 a,$b\in\{1,2,3,4,5,6\}$,故满足条件的 (a,b) 有 $(2,3)$,$(3,4)$,$(3,5)$,$(4,5)$,$(4,6)$,$(5,6)$ 等 6 种情况,所以满足条件的三角形有两解的概率是 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

(**15**)①④⑤ 【解析】①因为 $2S_1=a_1a_2$,,则 $2a_1=a_1a_2$. 所以 $a_2=2$. 故①正确;

②由 $2S_n=a_na_{n+1}(1)$,得 $2S_{n+1}=a_{n+1}a_{n+2}(2)$,$(2)-(1)$ 得 $2a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$,又显然 $a_{n+1}\neq 0$,所以 $a_{n+2}-a_n=2$. 故②错误;

③由②知,数列 $\{a_n\}$ 的奇数项、偶数项都是公差为 2 的等差数列,但数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列. 故③错误;

④根据等差数列的性质,可得 $a_{2015}=a_1+\frac{2015-1}{2}\times d=3+\frac{2015-1}{2}\times 2=2017$. 故④正确;

⑤当 n 为奇数时,$S_n=[3+5+\cdots+n+(n+2)]+[2+4+\cdots+(n-3)+(n-1)]=\frac{\frac{n+1}{2}(3+n+2)}{2}+\frac{\frac{n-1}{2}(2+n-1)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$;当为偶数时,$S_n=[3+5+\cdots+(n-1)+(n+1)]+[2+4+\cdots+(n-2)+n]=\frac{\frac{n}{2}(3+n+1)}{2}+\frac{\frac{n}{2}(2+n)}{2}=\frac{n^2+3n}{2}$. 故 $S_n=\begin{cases}\frac{n^2+3n+2}{2}, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{n^2+3n}{2}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$,

故⑤正确. 综上,所有正确命题的编号是①④⑤.

三. 解答题:本大题共 6 小题,共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 解答应写在答题卡上的指定区域内.

(**16**)【解】(Ⅰ)由 $3(a+b+c)(a+b-c)=(6+\sqrt{6})ab$,得 $3(a+b)^2-3c^2=(6+\sqrt{6})ab$,

得 $3a^2+3b^2-3c^2=\sqrt{6}ab$, ………………………………………… 2 分

故由余弦定理,得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{6}}{6}$. ………………………………… 5 分

(Ⅱ)由 $\cos A=\frac{2}{3}$,$A\in(0,\pi)$,得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. ……………………… 7 分

由 $\cos C=\frac{\sqrt{6}}{6}, C\in(0,\pi)$,得 $\sin C=\frac{\sqrt{30}}{6}$. ………………………………………… 8 分

又由正弦定理知$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,解得 $c=\sqrt{3}$. ………………………………………… 9 分

$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{30}}{6}=\frac{\sqrt{30}}{6}$, ……………… 10 分

所以的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{30}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. ………………………………… 12 分

(17)【解】(Ⅰ)由题意得 $S_n=2a_n-2$, ……………………………………………………………… 2 分

所以 $S_{n-1}=2a_{n-1}-2(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

两式相减得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$,即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$. ……………………………… 4 分

又 $a_1=S_1=2a_1-2$,所以 $a_1=2$.

所以数列$\{a_n\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列. …………………………………………… 6 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$, ……………………………………………………………… 8 分

所以 $T_n=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=a_{n+1}-a_1=2^{n+1}-2$. ………………………………………………………………………… 12 分

(18)【解】(Ⅰ)因为一线城市(北、上、广、深)俱乐部的参赛人数为 $6+3+3+2=14$,

则从这 18 名队员中随机选出 1 名,

求该人来自一线城市(北、上、广、深)俱乐部的概率为 $P=\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$. ………………………… 4 分

(Ⅱ)记北京的 3 位队员为 a,b,c,深圳的 2 位队员为 x,y, ……………………………………… 6 分

则从北京与深圳等两个俱乐部选出 2 位队员的所有情况有:

$(a,b),(a,c),(a,x),(a,y),(b,c),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y),(x,y)$等 10 种;……………… 8 分

其中,2 位队员来自同一个俱乐部的情况有:$(a,b),(a,c),(b,c),(x,y)$等 4 种;……………… 10 分

则从北京与深圳两个俱乐部选出 2 位队员代表发言获胜感受,2 位队员来自同一个俱乐部的概率

$P'=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. ………………………………………………………………………………… 12 分

(19)【解】(Ⅰ)$f'(x)=\mathrm{e}^x-2a$. ………………………………………………………………… 1 分

①当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)=\mathrm{e}^x-2a>0$ 恒成立,所以函数$f(x)$在上 $\mathbf{R}$ 单调递增,无极值; ………… 3 分

②当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=\ln x2a$;令 $f'(x)>0$,得 $x>\ln2a$;令 $f'(x)<0$,得 $x<\ln2a$;

所以函数$f(x)$在$(-\infty,\ln2a)$上单调递减,在$(\ln2a,+\infty)$上单调递增,

故函数$f(x)$在 $x=\ln2a$ 处取得极小值$f(\ln2a)=2a-2a\ln2a-1$,无极大值. ……………… 6 分

(Ⅱ)当$f(x)=\mathrm{e}^x-2ax-1$ 在$[0,2]$上是增函数时,有 $f'(x)=\mathrm{e}^x-2a\geqslant0$ 在$[0,2]$上恒成立,

即 $a\leqslant\frac{\mathrm{e}^x}{2}$在$[0,2]$上恒成立,所以 $a\leqslant\frac{1}{2}$; ………………………………………… 9 分

当$f(x)=\mathrm{e}^x-2ax-1$ 在$[0,2]$上是减函数时,有 $f'(x)=\mathrm{e}^x-2a\leqslant0$ 在$[0,2]$上恒成立,

即 $a\geqslant\frac{\mathrm{e}^x}{2}$在$[0,2]$上恒成立,$a\geqslant\frac{\mathrm{e}^2}{2}$. ……………………………………………… 12 分

综上,实数的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{\mathrm{e}^2}{2},+\infty\right)$. ……………………………………… 13 分

(20)【解】(Ⅰ)证明:由侧面 AA_1B_1B 为正方形,知 $A_1B_1\perp BB_1$.

又由 $AB\perp B_1C$，$AB/\!/A_1B_1$，得 $A_1B_1\perp BB_1$.

又 $BB_1\cap B_1C=B_1$，所以 $A_1B_1\perp$ 平面 BB_1C_1C. ………………………………………… 2 分

所以 $A_1B_1\perp BC_1$.

由 $\triangle BCB_1$ 是正三角形，得 $BC=BB_1$，则四边形 BB_1C_1C 是菱形，则 $B_1C\perp BC_1$. ……………… 4 分

又 $A_1B_1\cap B_1C$，所以 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1C. ………………………………………………… 6 分

（Ⅱ）解：设 O 是 BB_1 的中点，连结 CO，则 $CO\perp BB_1$.

若 $BC=1$，则 $B_1C=1$.

因为 $A_1B_1\perp$ 平面 BB_1C_1C，$A_1B_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以平面 $AA_1B_1B\perp$ 平面 BB_1C_1C. ………………………………………………………… 8 分

又平面 $AA_1B_1B\cap$ 平面 $BB_1C_1C=BB_1$，

所以 $CO\perp$ 平面 AA_1B_1B，且 $CO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… 10 分

连结 AB_1，则 $V_{C-ABB_1}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABB_1}\cdot CO=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

因为 $V_{B_1-ABC}=V_{C-ABB_1}=\dfrac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}$，

故三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. ………………………………………… 13 分

(21)【解】（Ⅰ）设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 与椭圆 $C':\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{15y^2}{16}=1$ 交于 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

$(y_1>0,y_2<0)$ 两点. 由椭圆的对称性可知，$y_1=p$，$y_2=-p$. ………………………………… 2 分

将点 $M(x_1,p)$ 代入抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 中，得 $x_1=\dfrac{p}{2}$， ……………………………… 3 分

再将点 $M\left(\dfrac{p}{2},p\right)$ 代入椭圆 $C':\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{15y^2}{16}=1$ 中，得 $\dfrac{\left(\dfrac{p}{2}\right)}{4}+\dfrac{15p^2}{16}=1$，解得 $p=1$.

故抛物线 C 的标准方程为 $y^2=2x$. ………………………………………………………… 5 分

（Ⅱ）设点 $A(x_3,y_3)$，$B(x_4,y_4)$.

由题意得 $x_3\neq x_4$（否则 $\alpha+\beta=\pi$，不满足 $\tan\theta=2$），且 $x_3\neq 0$，$x_4\neq 0$.

设直线 OA，OB 的方程分别为 $y=kx$，$y=mx(k\neq 0,m\neq 0)$. ………………………………… 6 分

联立 $\begin{cases}y=kx\\ y^2=2x\end{cases}$ 解得 $x_3=\dfrac{2}{k^2}$，$y_3=\dfrac{2}{k}$；

联立 $\begin{cases}y=mx\\ y^2=2x\end{cases}$ 解得 $x_3=\dfrac{2}{m^2}$，$y_3=\dfrac{2}{m}$；……………………………………………………… 7 分

则由两点式得，直线 AB 的方程为 $\dfrac{y-\dfrac{2}{m}}{\dfrac{2}{k}-\dfrac{2}{m}}=\dfrac{x-\dfrac{2}{m^2}}{\dfrac{2}{k^2}-\dfrac{2}{m^2}}$， ……………………………… 8 分

化简得 $y=\dfrac{mk}{k+m}x+\dfrac{2}{m}-\dfrac{2k}{(k+m)m}$. ①

因为 $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$，由 $\alpha+\beta=\theta$，得 $\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\theta+\tan\beta}{1-\tan\theta\tan\beta}=\dfrac{k+m}{1-km}=2$，得 $k=\dfrac{2-m}{1+2m}$，② … 10 分

将②代入①,化简得 $y=\frac{m(2-m)}{2(m^2+1)}x+\frac{2}{m}-\frac{2-m}{(m^2+1)m}$,得 $y=\frac{m(2-m)}{2(m^2+1)}x+\frac{2m+1}{m^2+1}$.

得 $y=\frac{m(2-m)}{2(m^2+1)m}x+\frac{2m-m^2+m^2+1}{m^2+1}$,

得 $y=\frac{m(2-m)}{2(m^2+1)}x+\frac{m(2-m)}{m^2+1}+1$,

得 $y=\frac{m(2-m)}{2(m^2+1)}(x+2)+1$,

即 $y-1=\frac{m(2-m)}{2(m^2+1)}(x+2)$.

令 $x+2=0$,不管 m 取何值,都有 $y=1$.

所以直线 AB 恒过定点$(-2,1)$. ………………………………………………………………… 13 分