数学(一)(文科)参考答案

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)B 【解析】$A\cap B=\{1,2\}$.

(2)B 【解析】因为$(a-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=(a-1)-(a+1)\mathrm{i}$. 当复数$(a-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$为纯虚数时,有 $a=1$,一定有 $a^2=1$;当 $a^2=1$ 时,对 $a=-1$,有$(a-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$是实数. 故选择 B.

(3)B 【解析】由向量平行的充要条件,可得 $1\times m-2\times(-2)=0$,解得 $m=-4$.

(4)D 【解析】由 $f(x)=2e^x-x$,得 $f'(x)=2e^x-1$,则切线的斜率为 $f'(0)=1$. 故所求的切线方程为 $y-2=x-0$,即 $x-y+2=0$.

(5)A 【解析】中位数为 45,众数为 45,极差为 $63-12=51$,平均数为

$$\frac{12+20+31+32+34+45+45+45+47+47+48+50+50+61+63}{15}=42.$$ 故选 A.

(6)A 【解析】$\mathrm{e}=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$,所以 $c=3\sqrt{3}$,$b^2=c^2-a^2=18$,所以 $b=3\sqrt{2}$.

(7)A 【解析】由 $a\sin A+b\sin B-c\sin C=0$ 及正弦定理,得 $a^2+b^2-c^2=0$,所以 $c^2=a^2+b^2$. 故圆心 $C(0,0)$到直线 $l:ax+by+c=0$ 的距离为 $d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$,故所求弦长为 $l=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3}$.

(8)C 【解析】对于 A 项,由 $a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a}$,同时乘以 ab,得 $a^2b+a>ab^2+b$,即 $a(ab+1)>b(ab+1)$. 即 $a>b$,与题设一致. 故 A 项恒成立;对于 B 项,$a+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$,故 B 项恒成立;对于 C 项,由 $\frac{b}{a}>\frac{b+1}{a+1}$,得 $b(a+1)>a(b+1)$,即 $ab+b>ab+a$,得 $b>a$,与题设 $a>b>0$ 矛盾,故 C 项不成立;对于 D 项,$b+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}}=2$,故 D 项恒成立.

(9)D 【解析】在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1>0$,公比 $q<0$,故奇数项为正数,偶数项为负数,且 $a_9=4$,$a_{10}=-2$. 故 $a_{11}=1$,$a_{12}=-\frac{1}{2}$. 故 $\prod_9>0$,$\prod_{10}<0$,$\prod_{11}<0$,$\prod_{12}>0$. 最大项只可能在$\prod_9$ 与$\prod_1 2$ 中产生. 又因为 $a_{10}a_{11}a_{12}=1$,所以$\prod_9=\prod_{12}$. 故数列$\{\prod_n\}$中的最大项是$\prod_9$ 或$\prod_{12}$.

(10)D 【解析】因为所有点$(s,f(t))(s\in[1,3])$构成一个正方形区域,所以 $f_{max}(x)-f_{min}(x)=3-1=2$. 又 $a\geqslant 4$,则 $x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4>0$. 故 $f(x)$在$[1,2]$上单调递减,在$[2,3]$上单调递增,且 $f(1)=f(3)$. 故 $f_{max}(x)=f(1)=f(3)=\log_2(a-3)$,$f_{min}(x)=f(2)=\log_2(a-4)$,则 $\log_2(a-3)-\log_2(a-4)=2$,即 $\log_2\frac{a-3}{a-4}=2$,解得 $a=\frac{13}{3}$. 故 $f(x)=\log_2\left(x^2-4x+\frac{13}{3}\right)$. 其单调增区间是$[2,+\infty)$.

二、填空题:本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

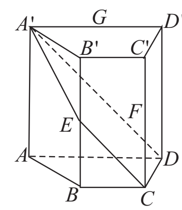
(11)$\frac{1}{3}$ 【解析】$\cos\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

(12)0 【解析】$\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-\log_8 9\cdot\log_{27}4=\frac{4}{9}-\frac{\lg 9}{\lg 8}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 27}=\frac{4}{9}-\frac{2\lg 3}{3\lg 2}\cdot\frac{2\lg 2}{3\lg 3}=\frac{4}{9}-\frac{4}{9}=0$.

(**13**)$\frac{32}{5}$　【解析】由三视图可知,该三棱锥的底面是底和高分别为 5,$\frac{12}{5}$的三角形,高为$\sqrt{4^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{16}{5}$,则该三棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times5\times\frac{12}{5}\times\frac{16}{5}=\frac{32}{5}$.

(**14**)5　【解析】第一次运行时,$t=1\times3=3$,$k=2$;第二次运行时,$t=3\times4=12$,$k=3$;第三次运行时,$t=12\times5=60$,$k=4$;第四次运行时,$t=60\times6=360$,$k=5$;此时,刚好不满足 $t<300$,故输出 $k=5$.

(**15**)①③④⑤　【解析】因为 $BE\parallel AA'$,$BC\parallel AD$,$BC\cap BE=B$,$AD\cap AA'=A$,所以平面 $EBC\parallel$平面 $A'AD$,从而平面 $A'CD$ 与这两个平面的交线相互平行,即 $EC\parallel A'D$. 故 $\triangle EBC$ 与 $\triangle A'AD$ 的对应边相互平行,于是 $\triangle EBC\backsim\triangle A'AD$,所以$\frac{BE}{BB'}=\frac{BE}{AA'}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$,即 E 为 BB'的中点. 从而①正确;若延长 AB,DC,$A'E$ 则它们必交于同一点,因而几何体 $EBC-A'AD$ 是棱台,⑤正确;由于 E 是中点,所以易证 $A'G$ 与 EF 平行且相等,从而 $A'E\parallel FG$,②错误,③正确;由于 E 是中点,易证 $BF\perp CE$,若 $AD\perp CD$,则 $BC\perp CD$,从而可得 $CD\perp BF$,易知平面 $ABF\perp$平面 $A'CD$,④正确.



三、解答题:本大题共 6 小题,共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 解答应写在答题卡上的指定区域内.

(**16**)【解】(Ⅰ)$f(x)=\sqrt{3}\cos x\sin x+\cos^2x+\cos2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{1+\cos2x}{2}+\cos2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{3}{2}\cos2x+\frac{1}{2}=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$. ………………………………………… 4 分

故函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. ………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)由 $f(B)=\sqrt{3}\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,得 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)=0$,

则 $2B+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $B=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

因为 B 是锐角,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………… 9 分

由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$,即$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{a}{\sin\frac{\pi}{4}}$,解得 $a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ……………………………… 12 分

(**17**)【解】(Ⅰ)用气量在[20,30)内的频数是 50,频率是 $0.025\times10=0.25$,

则 $n=\frac{50}{0.25}=200$. ………………………………………………………………………………… 2 分

用气量在[0,10)内的频率是$\frac{25}{200}=0.125$,则 $b=\frac{0.125}{10}=0.0125$. ……………………………… 4 分

用气量在[50,60]内的频率是$\frac{5}{200}=0.025$,则 $a=\frac{0.025}{10}=0.0025$. ………………………………… 6 分

(Ⅱ)设 A,B,C,D,E 代表用气量从多到少的 5 位居民,从中任选 2 位,

总的基本事件为 AB,AC,AD,AE,BC,BD,BE,CD,CE,DE 共 10 个;………………………… 8 分

包含 A 的有 AB,AC,AD,AE 共 4 个, ……………………………………………………………… 10 分

所以 $P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. ………………………………………………………… 12 分

(**18**)【解】(Ⅰ)$f'(x)=2-\frac{1}{x}$,$f'(1)=1$,$f(1)=2-m$ ………………………… 2 分

故函数 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 的切线方程为 $y-(2-m)=x-1$,即 $x-y+1-m=0$. ………… 4 分

又已知切线方程为 $x-y=0$,

所以 $1-m=0$,解得 $m=1$. ………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)由题意,$m=1$,$f(x)=2x-\ln x-1(x>0)$,$g(x)=x-1(m\in\mathbf{R})$

$h(x)=f(x)-g(x)=f(x)=2x-\ln x-1-x+1=x-\ln x(x>0)$. ………………… 8 分

则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}$. ………………………………………………………… 10 分

令 $h'(x)>0$,得 $x>1$;令 $h'(x)<0$,得 $0<x<1$;

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故函数 $h(x)$ 的最小值为 $h(1)=1$. ………………………………………………… 12 分

(**19**)【解】(Ⅰ)由题意可得,$f'(x)=a_{n+1}-a_n+2a_{n+1}\cos x+a_{n+2}\sin x$,………………… 1 分

对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,$f'(0)=a_{n+1}-a_n+2a_{n+1}=0$,得 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$,

又 $a_2=\frac{2}{9}\neq0$,故数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列. ………………………… 5 分

故 $a_n=a_2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}=\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$. ……………………………………… 6 分

(Ⅱ)$b_n=\frac{n}{2}a_n=\frac{n}{2}\cdot2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{n}{3^n}$. ……………………………………………… 7 分

则 $S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ +\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$,①

$\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\ +\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$,②

①-②得 $\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}^n\right)\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{2n+3}{2\times3^{n+1}}$

所以 $S_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times3^n}$. ………………………………………………… 13 分

(**20**)【解】(Ⅰ)因为 BCC_1B_1 是边长为 4 的正方形,

所以 $BC=CC_1=AA_1=4$.

因为 $\angle ACB=90°$,所以 $AC\perp BC$.

又易知 $AA_1\perp$ 平面 ABC,所以 $AA_1\perp BC$.

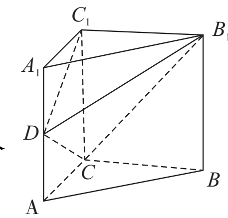
又 $AC\cap AA_1=A$,所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1.

又 $AC=2$,所以直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的表面积为

$S_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times4\times2\times2+4\times4+4\times2+\sqrt{2^2+4^2}\times4=32+8\sqrt{5}$(平方米). ……………… 5 分

则需油漆费 $(32+8\sqrt{5})\times40=1280+320\sqrt{5}\approx1280+320\times2.236\approx1996$(元). ………… 7 分

（Ⅱ）当点 D 为 AA_1 的中点时，$CD\perp$ 平面 B_1C_1D. 证明如下：



由（Ⅰ）得 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1.

又 $BC/\!/B_1C_1$，所以 $B_1C_1\perp$ 平面 ACC_1A_1.

所以 $B_1C_1\perp CD$. ………………………………………………………… 9 分

故当 $CD\perp C_1D$ 时，有 $CD\perp$ 平面 B_1C_1D，且此时有 $\triangle C_1A_1D\sim\triangle DAC$.

设 $AD=x$，则 $\dfrac{A_1C_1}{A_1D}=\dfrac{AD}{AC}$，即 $\dfrac{2}{4-x}=\dfrac{x}{2}$，解得 $x=2$. ………………………………………… 11 分

此时 $AD=2=\dfrac{1}{2}AA_1$，即当点 D 为 AA_1 的中点时，$CD\perp$ 平面 B_1C_1D. ………………………… 13 分

(**21**)【解】（Ⅰ）抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $(1,0)$，则椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的焦半径为 $c=1$.

又 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，及 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，$b=1$.

所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………………………… 4 分

（Ⅱ）因直线 l 过点 B，且斜率为 $k=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故有 $l:y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$.

联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)\end{cases}$，消去 y，得 $2x^2-2x-1=0$. ………………………………………… 6 分

设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，且不妨设 $x_1<x_2$，则 $\begin{cases}x_1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 于是 $\begin{cases}y_1=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ y_2=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$，

又 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OH}=0$，得 $\overrightarrow{OH}=(-x_1-x_2,-y_1-y_2)$，即点 $H\left(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ………………………… 8 分

而点 G 与点 H 关于原点对称，于是，可得点 $G\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

若线段 MN,GH 的中垂线分别为 l_1 和 l_2，$k_{GH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则有 $l_1:y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，$l_2:y=-\sqrt{2}x$

.

联立方程组 $\begin{cases}y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}(x-\dfrac{1}{2})\\ y=-\sqrt{2}x\end{cases}$，解得 l_1 和 l_2 的交点为 $O_1\left(\dfrac{1}{8},-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)$. ………………………… 11 分

因此，可算得 $|O_1H|=\sqrt{\left(\dfrac{9}{8}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$，

$|O_1M|=\sqrt{\left(x_1-\dfrac{1}{8}\right)^2+\left(y_1+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$.

所以 M,G,N,H 四点共圆，且圆心坐标为 $O_1\left(\dfrac{1}{8},-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)$，半径为 $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$. ………………………… 13 分