数学(三)(理科)参考答案

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. C 【解析】由题知 $a=2,b=1$,$\therefore \frac{a+bi}{1-2i}=\frac{2+i}{1-2i}=i$,故选 C.

2. B 【解析】当 $a>0$ 时,例如 $a=0.5$,$A=\{x|x>0.5\}$,此时 $A\not\subseteq B$,即充分性不成立,反之,当 $A\subseteq B$ 时,$a\geqslant 1\Rightarrow a>0$,即必要性成立,故选 B.

3. C 【解析】常数项是 $xC_9^5x^4\left(-\frac{1}{x}\right)^5=-126$,故选 C.

4. C 【解析】当 $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$,$\pi x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$,$|\sin\pi x|$是减函数,故选 C.

5. D 【解析】设 $\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=a$,$\because f(x)=\frac{1}{x}+3\int_1^e f(x)\mathrm{d}x$,$\therefore f(x)=\frac{1}{x}+3a$,$\therefore \int_1^e f(x)\mathrm{d}x=\int_1^e\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_1^e 3a\mathrm{d}x=\ln x|_1^e+3a(e-1)$,即 $a=\ln e-\ln 1+3a(e-1)$,$\therefore a=\frac{1}{4-3e}$,故选 D.

6. A 【解析】作出可行域$\begin{cases}x\leqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x-y+2\geqslant 0\end{cases}$,得 $z_{min}=-2+3\times 0=-2$,故选 A.

7. B 【解析】由三视图知,几何体的直观图如图所示,所以 $x^2-(2\sqrt{7})^2=6^2-y^2$,即 $x^2+y^2=36+28=64\geqslant 2xy$,即 $xy\leqslant 32$,当且仅当 $x=y=4\sqrt{2}$时取等号,此时三棱锥的高 $h=2$,所以 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 2\sqrt{7}\times 2=\frac{8\sqrt{14}}{3}$,故选 B.

8. C 【解析】将 8 个球分成四组,再分配到四个学生手里即可,将 8 个球分成四组,有两种分组方法,一是(有奖,无奖)、(有奖,无奖)、(有奖,无奖)、(无奖,无奖),共有 A_4^4 种,二是(有奖,有奖)、(有奖,无奖)、(无奖,无奖)、(无奖,无奖),有 C_3^2 种分组方法,再将这些分组后的球分到四个学生手里,有 A_4^2 种,根据分步乘法计数原理知有 $C_3^2A_4^2$,由分类加法计数原理知,共有 $N=A_4^4+C_3^2A_4^2=60$ 种方法,故选 C.

9. B 【解析】设$f(x)-\ln x=a$,则$f(x)=\ln x+a$,$\because f[f(x)-\ln x]=e+1$,$\therefore f(a)=e+1$,即 $\ln a+a=e+1$,解得 $a=e$,即$f(x)=\ln x+e$,$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}$,$\therefore g(x)=\ln(x-1)+e-\frac{1}{x}-e=\ln(x-1)-\frac{1}{x}$,$\because g(2)=-\frac{1}{2}<0$,$g(3)=\ln 2-\frac{1}{3}>0$,即函数 $g(x)$的零点在(2,3)上,故选 B.

10. B 【解析】由题知,$S_n=\frac{\frac{3}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$,当 n 是偶数时,$S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$,所以 $S_n\in\left[\frac{3}{4},1\right)$,当 n 是奇数时,$S_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^n$,所以 $S_n\in\left(1,\frac{3}{2}\right]$,即 $S_n\in\left[\frac{3}{4},1\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right]$,因为$f(x)=4x-\frac{1}{x}$在 $x\in\left[\frac{3}{4},1\right)$和 $x\in\left(1,\frac{3}{2}\right]$是增函数,所以$f(x)\in\left[\frac{5}{3},3\right]\cup\left(3,\frac{16}{3}\right]$,即 $S_n-\frac{1}{S_n}\in\left[\frac{5}{3},3\right]\cup\left(3,\frac{16}{3}\right]$,

所以 $m\leqslant\frac{5}{3}$，$M\geqslant\frac{16}{3}$，即 $(M-m)_{min}=\frac{16}{3}-\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$，故选 B.

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,请把正确的答案填在横线上)

11. 26 【解析】由题知，$\bar{x}=8.5$，$\bar{y}=16$，带入回归方程得，$16=8.5b-1$，解得 $b=2$，故 $\hat{y}=2\hat{x}-1$，令 $51=2x-1$，得 $x=26$.

12. $\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$ 【解析】由题知，A 点在直线 $C_1:x-y+2=0$ 上移动，B 点在圆 $C_2:x^2+y^2-2x=0$ 上移动，圆心是 $(1,0)$，半径 $r=1$，圆心到直线的距离 $d=\frac{|1-0+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$\therefore |AB|_{min}=d-r=\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$.

13. $(-\infty,1]$ 【解析】由题知，$f(x)=|x-1|+2|x-2|=\begin{cases}3x-5(x\geqslant 2)\\x-1(1\leqslant x<2)\\5-x(x<1)\end{cases}$，作出函数 $y=f(x)$ 的图像知，$f(x)_{min}=1$，$\therefore |2^m-1|\leqslant 1$，$-1\leqslant 2^m-1\leqslant 1$，解得 $m\leqslant 1$，即 $m\in(-\infty,1]$.

14. $\frac{7}{2}$ 【解析】$\because S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}|OM||ON|\sin\angle MON\leqslant\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\frac{\pi}{2}=2$，即 $\angle MON=\frac{\pi}{2}$ 时，$\triangle MON$ 的面积最大，不妨设 $M(0,2)$，$N(2,0)$，线段 MN 的方程是 $x+y-2=0$，其中 $x\in[0,2]$，设点 $P(x,2-x)$，$x\in[0,2]$，$\because \overrightarrow{MO}=(0,-2)$，$\overrightarrow{MP}=(x,-x)$，$\overrightarrow{BP}=(x-2,2-x)$，$\therefore \overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{BP}^2=(0,-2)\cdot(x,-x)+(x-2,2-x)^2=2x+2(x-2)^2=2x^2-6x+8$，显然当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$(\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}^2)_{\min}=\frac{7}{2}$.

15. ①②③④. 【解析】在①中，点 C 在球面上，故①正确；由对称性知，②显然正确；在③中，过已知两点有且只有一条直线，所以和球面的交点只有一个，故③正确；在④中，$\overrightarrow{EA'}\parallel\overrightarrow{EA}$ 且 A' 在球面上，故④正确；在⑤中，$\overrightarrow{EB}$ 和 $\overrightarrow{EB'}$ 不共线，故 B' 不是“经纬点”点，综上正确的命题是①②③④.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 75 分,请写出必要的文字说明和解题步骤)

16.【解】(Ⅰ)由题得，$\sin(2B-\frac{\pi}{6})=1-2\sin^2(C-\frac{\pi}{3})=\cos(2C-\frac{2\pi}{3})=\cos(\frac{2\pi}{3}-2C)$

即 $\sin(2B-\frac{\pi}{6})=\sin(2C-\frac{\pi}{6})$，$\because 0<A<\pi$，$0<C<\pi$，$\therefore -\frac{\pi}{6}<2B-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$

$\therefore -\frac{\pi}{6}<2C-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$，$\therefore 2B-\frac{\pi}{6}=2C-\frac{\pi}{6}$，$2B-\frac{\pi}{6}+2C-\frac{\pi}{6}=\pi$，$\therefore B=C$(舍去)

$B+C=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore A=\pi-(B+C)=\frac{\pi}{3}$，………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)$\because a=2\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$a^2=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc=bc$，$\therefore bc\leqslant 12$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times 12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ ……………………………………………………… 12 分

17.【解】(Ⅰ)$\because AE\perp$ 面 $BCDE$，$\therefore AE\perp BD$

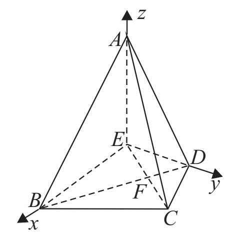
$\because F$ 是 EC 中点且 $\triangle BEC$ 是正三角形，$\therefore BD$ 是 EC 的中垂线，

$\therefore BD\perp EC$，$\therefore BD\perp$ 面 AEC，$\because BD\subseteq$ 面 ABD，$\therefore$ 面 $ABD\perp$ 面 AEC …………………… 6 分

(Ⅱ)如图所示建立空间直角坐标系，由几何关系知，各点的坐标如下：

$B(2,0,0)$，$C(1,\sqrt{3},0)$，$A(0,0,2)$，$F(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$

$\overrightarrow{FB}$是面 EAC 的法向量,$\overrightarrow{FB}=(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$



设面 BCA 的法向量是 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

$\because \overrightarrow{CB}=(1,-\sqrt{3},0),\overrightarrow{AB}=(2,0,-2)$

$\therefore \begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-\sqrt{3}y=0\\ 2x-2z=0\end{cases}$,令 $y=1$ 得,$x=\sqrt{3},z=\sqrt{3}$,$\therefore \boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{FB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{FB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

即二面角 $B-CA-E$ 的余弦值是$\frac{\sqrt{7}}{7}$. ………………………………………………………………… 12 分

18.【解】(Ⅰ)由题知游客经 H 点到达山顶处的风景区的概率是$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. ……… 4 分

(Ⅱ)游客到达 E 处的概率是$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,

故游客到达 E 处并领取环保宣传册的概率 $P(E)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$,

游客到达 F 的概率是$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$.

故游客到达 F 点并领取环保宣传册的概率是$\frac{5}{12}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{4}$.

游客到达 H 点且领取环保宣传册的概率是 $P(H)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$, ……………………………………… 8 分

故游客在上山途中领取环保宣传册的概率 $P=P(E)+P(F)+P(H)=\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{101}{180}$.

设 18000 名游客中领取环保宣传册的人数为 ζ,则 $\zeta\sim B(18000,\frac{101}{180})$,

$\therefore E\zeta=18000\times\frac{101}{180}=10100$,所以景区每天至少要准备 10100 分环保宣传材料才是合理的.

……………………………………………………………………………………………………… 12 分.

19.【解】(Ⅰ)由题知 $1-f(1)+\mathrm{e}-1=0$,$\therefore f(1)=\mathrm{e}$,$\therefore \frac{b\mathrm{e}}{1}=\mathrm{e}$,$\therefore b=1$,

又$\because f'(x)=a(\mathrm{e}^{x-1}\ln x+\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x})+\frac{\mathrm{e}^{x}(x-1)}{x^2}$,$\therefore f'(1)=a=1$,$\therefore f(x)=\mathrm{e}^{x-1}\ln x+\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ ……………… 5 分.

(Ⅱ)$f(x)>2$ 等价于 $\mathrm{e}^{x-1}\ln x+\frac{\mathrm{e}^x}{x}>2$,$x\mathrm{e}^{x-1}\ln x>2x-\mathrm{e}^x$,$x\ln x>\frac{2x}{\mathrm{e}^{x-1}}-\mathrm{e}$

设 $g(x)=x\ln x$,$\therefore g'(x)=\ln+1$,$\therefore x\in(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,

$x\in(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,$\therefore g(\frac{1}{\mathrm{e}})_{极小}=g(\frac{1}{\mathrm{e}})_{min}=-\frac{1}{\mathrm{e}}$,$\therefore g(x)\geqslant-\frac{1}{\mathrm{e}}$,

设 $h(x)=\frac{2x}{\mathrm{e}^{x-1}}-\mathrm{e}$,$\therefore h'(x)=\frac{2(\mathrm{e}^{x-1}-x\mathrm{e}^{x-1})}{(\mathrm{e}^{x-1})^2}$

$h'(x)=\frac{2\mathrm{e}^{x-1}(1-x)}{(\mathrm{e}^{x-1})^2}=\frac{2(1-x)}{\mathrm{e}^{x-1}}$,$\therefore x\in(0,1)$时 $h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,

$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，$h(1)_{极大}=h(1)_{max}=2-\mathrm{e}$，

$\because -\frac{1}{\mathrm{e}}-(2-\mathrm{e})=\mathrm{e}-2-\frac{1}{\mathrm{e}}>0$，$\therefore g(x)_{max}>h(x)_{max}$，$\therefore f(x)>2$得证. ………………………… 12 分

20.【解】(Ⅰ)设椭圆的焦距是$2c$，所以$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$由椭圆的几何性质得，

$BF_1=a=2$，因为$D\left(-\frac{8\sqrt{3}}{7},-\frac{1}{7}\right)$在椭圆$C$上，所以$\frac{\left(-\frac{8\sqrt{3}}{7}\right)^2}{4}+\frac{\left(-\frac{1}{7}\right)^2}{b^2}=1$，解得$b=1$，

故椭圆的方程是$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ……………………………………………………………… 5 分.

(Ⅱ)由直线的截距式知，直线AB的方程是$\frac{x}{-c}+\frac{y}{-b}=1$，

联立$\begin{cases}\frac{x}{-c}+\frac{y}{-b}=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，得$\begin{cases}x_1=\frac{-2a^2c}{a^2+c^2}\\ y_1=\frac{b(a^2-c^2)}{a^2+c^2}\end{cases}$或$\begin{cases}x_2=0\\ y_2=-b\end{cases}$，

即$A\left(\frac{-2a^2c}{a^2+c^2},\frac{b(a^2-c^2)}{a^2+c^2}\right)$，$B(0,-b)$，所以$D\left(\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}\right)$，

又因为$F_2(c,0)$，所以$\overrightarrow{DF_2}=\left(\frac{3a^2c+c^3}{a^2+b^2},\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}\right)$，

因为$F_1(-c,0)$，所以$\overrightarrow{BF_1}=(-c,b)$，因为$\overrightarrow{BA}/\!/\overrightarrow{BF_1}$，所以$BF_1\cdot\overrightarrow{DF_2}=0$，即

$(-c)\times\frac{3a^2c+c^3}{a^2+b^2}+b\times\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}=0$，化简得$a^2=5c^2$，即$\mathrm{e}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ………………………………… 13 分.

21.【解】(Ⅰ)由题知，$a_1+3d=7$，$\therefore d=1$，$\therefore a_n=n+3$ ………………………………………… 3 分

(Ⅱ)(1)当$n=2$时，$b_2=b_1^2-2=14>5=a_2$不等式成立

(2)假设$n=k(k\geqslant 2)(k\in\mathbf{N})$时不等式成立，即$b_k>k+3$

则当$n=k+1$时，$b_{k+1}=b_k^2-(k-1)b_k-2=b_k(b_k-k+1)-2>b_k(k+3-k+1)-2$

$=4b_k-2>4(k+3)-2=4k+10>(k+1)+3.$

当$n=k+1$时不等式也成立，由(1)(2)知$b_n>a_n$，$(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N})$. ………………………………… 8 分

(Ⅲ)设$f(x)=\ln(1+x)-x$，当$x\in(0,+\infty)$时，$\therefore f(x)=-\frac{x}{1+x}<0$，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

$\therefore f(x)<f(0)=0$，$\therefore \ln(1+x)<x$，$\because n\geqslant 2$时，$b_n>a_n$，$\therefore \frac{1}{b_n}<\frac{1}{a_n}$

$\therefore \ln(1+\frac{1}{b_nb_{n+1}})<\frac{1}{b_nb_{n+1}}<\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N})$

$\therefore \ln(1+\frac{1}{b_2b_3})+\ln(1+\frac{1}{b_3b_4})+\cdots\cdots+\ln(1+\frac{1}{b_nb_{n+1}})<\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}$

$\therefore \ln(1+\frac{1}{b_2b_3})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{b_nb_{n+1}})<\frac{1}{5}-\frac{1}{n+4}<\frac{1}{5}$ ………………………………………………… 14 分.