数学(二)(理科)参考答案

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

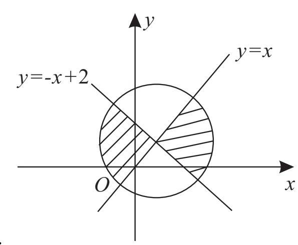
(**1**)A 【解析】若 z_2 是 z_1 的共轭复数,则 $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$,则 $\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2015}=\left(\frac{2-4}{2}\right)^{2015}=-1$.

(**2**)C 【解析】全称性命题的否定是特称性命题,且否定结论,故命题"$\exists x>0,\ln x-x<0$"的否定是"$\forall x>0,\ln x-x\geqslant 0$".

(**3**)A 【解析】由题意,双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1(a\neq 0)$ 的渐近线斜率为 $\frac{\sqrt{3}|a|}{|a|}=\sqrt{3}$,则其倾斜角为 60°. 故双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1(a\neq 0)$ 的渐近线与虚轴的夹角为 $90°-60°=30°$.

(**4**)C 【解析】设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$,则 $\begin{cases} |\boldsymbol{b}|=\sqrt{x^2+y^2}=5 \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-x+2y=0 \end{cases}$,解得 $\begin{cases} x=2\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$,故 $\boldsymbol{b}=(2\sqrt{5},\sqrt{5})$ 或 $\boldsymbol{b}=(-2\sqrt{5},-\sqrt{5})$.

(**5**)B 【解析】点集 $M=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 4\}$,$N=\{(x,y)|(x-y)(x+y-2)\geqslant 0\}$,作出 $M\cap N$ 所构成平面区域如下图阴影部分所示:由图象可知,$M\cap N$ 所构成平面区域的面积为 $S=\frac{1}{2}\times\pi\times 2^2=2\pi$.

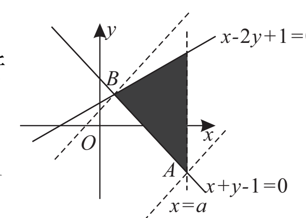


(**6**)C 【解析】$\left(\frac{1}{x}+x\right)^6$ 中展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r\left(\frac{1}{x}\right)^{6-r}x^r=C_6^r x^{2r-6}$,令 $2r-6=0$,得 $r=3$;令 $2r-6=1$,得 r 无整数解,故 $\left(\frac{1}{x}+x\right)^6$ 中展开式的常数项为 $C_6^3=20$,无一次项. 故 $(x-1)\left(\frac{1}{x}+x\right)^6$ 的展开式中的一次项系数是 20.

(**7**)B 【解析】由三视图可知,该几何体是某个圆柱的 $\frac{1}{3}$,且圆柱的高为 4,设圆柱的底面圆半径为 r,则 $r+r\cos 60°=3$,解得 $r=2$. 故该几何体的体积是 $V=\frac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times 4=\frac{16\pi}{3}$.

(**8**)D 【解析】函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个长度单位,得到函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$. 由题意,函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\frac{\pi}{6}$ 处取得最小值,所以 $\omega x-\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\omega=-12k+\frac{9}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 故当 $k=0$ 时,ω 取得最小正值 $\frac{9}{2}$.

(**9**)A 【解析】画出约束条件 $\begin{cases} x-2y+1\geqslant 0 \\ x<2 \\ x+y-1\geqslant 0 \end{cases}$ 表示的可行域如下图阴影区域所示,由 $z=3x-4y+3$,得 $y=\frac{3}{4}x+\frac{3-z}{4}$. 平移直线 $y=\frac{3}{4}x$,当经过点 $A(a,1$



$-a)$，$B(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$时，代入 z，得 z 的取值分别为 $7a-1$，$\frac{4}{3}$，可知$\frac{4}{3}\leqslant u<7a-1$. 则 $z=3x-4y+3$ 的取值范围$\left[\frac{4}{3},7a-1\right)$. 又已知 $z=3x-4y+3$ 的取值范围是$[b,2)$，比较得$\begin{cases}2=7a-1\\b=\frac{4}{3}\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=\frac{3}{7}\\b=\frac{4}{3}\end{cases}$

(**10**) C 【解析】捆绑法和插空法：将 3 个连续的红球捆在一起，看成 1 个红球，这样与第 4 个红球看成是 2 个红球，然后在 4 个白球形成的 5 个空隙中，插入 2 个红球，共有 $A_5^2=20$ 种方法.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

(**11**) 16 【解析】设青年职工应抽取 x 人，则由分层抽样的特点，得$\frac{x}{240}=\frac{60}{900}$，解得 $x=16$. 故青年职工应抽取的人数为 16.

(**12**) $2\sqrt{5}$ 【解析】直线 l 的参数方程化为直角坐标方程是 $2x-y=0$，曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程是 $y=x^2$，联立$\begin{cases}2x-y=0\\y=x^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$，则点 $A(0,0)$，$B(2,4)$. 故 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{5}$.

(**13**) -1 或 $-\frac{1}{2}$或 16. 【解析】当 $x\leqslant-1$ 时，由 $x^2+2x+5=4$，得 $x=-1$；当 $-1<x\leqslant5$ 时，由 $2-4x=4$，得 $x=-\frac{1}{2}$；当 $x>5$ 时，由 $\log_2x=4$，得 $x=16$；综上，输入的 x 的值为 -1 或 16.

(**14**) $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 【解析】由已知，得$f(x)$在$[0,+\infty)$上也是减函数，因为 $g(\log_2x)<g(1)$，所以$f(|\log_2x|)>f(1)$，得$|\log_2x|<1$，得 $-1<\log_2x<1$，解得$\frac{1}{2}<x<2$.

(**15**) ①④⑤ 【解析】①因为 $2S_1=a_1a_2$，，则 $2a_1=a_1a_2$. 所以 $a_2=2$. 故①正确；

②由 $2S_n=a_na_{n+1}(1)$，得 $2S_{n+1}=a_{n+1}a_{n+2}(2)$，$(2)-(1)$得 $2a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$，又显然 $a_{n+1}\neq0$，所以 $a_{n+2}-a_n=2$. 故②错误；

③由②知，数列$\{a_n\}$的奇数项、偶数项都是公差为 2 的等差数列，但数列$\{a_n\}$不是等差数列. 故③错误；

④根据等差数列的性质，可得 $a_{2015}=a_1+\frac{2015-1}{2}\times d=3+\frac{2015-1}{2}\times2=2017$. 故④正确；

⑤当 n 为奇数时，$S_n=[3+5+\cdots+n+(n+2)]+[2+4+\cdots+(n-3)+(n-1)]=\frac{\frac{n+1}{2}(3+n+2)}{2}+\frac{\frac{n-1}{2}(2+n-1)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$；当为偶数时，$S_n=[3+5+\cdots+(n-1)+(n+1)]+[2+4+\cdots+(n-2)+n]=\frac{\frac{n}{2}(3+n+1)}{2}+\frac{\frac{n}{2}(2+n)}{2}=\frac{n^2+3n}{2}$. 故 $S_n=\begin{cases}\frac{n^2+3n+2}{2},n\text{ 为奇数}\\\frac{n^2+3n}{2},n\text{ 为偶数}\end{cases}$，

故⑤正确. 综上，所有正确命题的编号是①④⑤.

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 解答应写在答题卡上的指定区域内.

(**16**)【解】(Ⅰ)因为 $\cos A=\frac{2}{3}>0$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. …………………………………………………………………… 2 分

又$\sqrt{5}\cos C=\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\frac{\sqrt{5}}{3}\cos C+\frac{2}{3}\sin C$,

整理得 $\tan C=\sqrt{5}$. …………………………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)由 $\tan C=\sqrt{5}$,得 $\sin C=\frac{\sqrt{30}}{6}$,$\cos C=\frac{\sqrt{6}}{6}$. 故由(Ⅰ)得 $\sin B=\sqrt{5}\cos C=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

又由正弦定理知$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,解得 $c=\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 8 分

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{30}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. ………………………………… 12 分

(**17**)【解】(Ⅰ)“从这 18 名队员中随机选出两名,两人来自于同一俱乐部”记作事件 A,

则 $P(A)=\frac{C_6^2+C_3^2+C_3^2+C_2^2}{C_1^28}=\frac{22}{153}$. ………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)ζ 的所有可能取值为 0,1,2. ……………………………………………………………………… 7 分

因为 $P(\zeta=0)=\frac{C_{15}^2}{C_{18}^2}=\frac{35}{51}P(\zeta=1)=\frac{C_3^1C_{15}^1}{C_{18}^2}=\frac{5}{17}$,$P(\zeta=2)=\frac{C_3^2}{C_{18}^2}=\frac{1}{51}$ ……………………………… 9 分

故 ζ 的分布列为

ζ	0	1	2
P	$\frac{35}{51}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{1}{51}$

…… 10 分

故 ζ 的数学期望为 $E(\zeta)=0\times\frac{35}{51}+1\times\frac{5}{17}+2\times\frac{1}{51}=\frac{1}{3}$. ………………………………………… 12 分

(**18**)【解】(Ⅰ)由题意得 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=2a_n-2$, ……………………………………… 2 分

所以 $S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=2a_{n-1}-2(n\geqslant 2)$.

两式相减得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$,即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$. ………………………………………………… 4 分

又 $a_1=S_1=2a_1-2$,所以 $a_1=2$.

所以数列$\{a_n\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列. ………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$,

则 $S_n=2a_n-2=2(2^n-1)$. …………………………………………………………………………… 8 分

所以 $b_n=\frac{2^{n+1}}{(a_{n+1}-1)S_n}=\frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$. ……………………………… 10 分

所以 $T_n=\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\left(\frac{1}{2^3}-1-\frac{1}{2^4}-1\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$

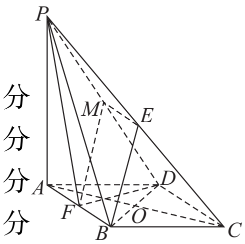
$=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

(**19**)【解】(Ⅰ)证明:取 PD 中点为 M,连结 ME,MF. 连结 AC,BD 交于点 O.

因为 E 是 PC 的中点,所以 ME 是△PCD 的中位线.

所以 $ME=\frac{1}{2}CD$ 且 $ME/\!/CD$. ………………………………………………………………………… 1 分

又 $BF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD$ 且 $BF/\!/CD$,



所以 $ME=BF$ 且 $ME/\!/BF$. ………………………………………………… 2 分

所以四边形 $MEBF$ 是平行四边形. ………………………………………… 3 分

所以 $BE/\!/MF$. …………………………………………………………… 4 分

又 $BE\not\subset$ 平面 PDF, $MF\subset$ 平面 PDF, 所以 $BE/\!/$ 平面 PDF. ……………… 6 分

(Ⅱ)因为 $BD\perp PC$, AC 是 PC 在平面 $ABCD$ 内的射影,

所以 $BD\perp AC$.

所以四边形 $ABCD$ 是菱形. …………………………………………………………………………… 7 分

又 $AC=\sqrt{3}BD$, 所以 $AO=\sqrt{3}OD$.

故由 $\tan\angle DAO=\frac{DO}{AO}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 得 $\angle DAO=30°$, 所以 $\angle DAB=60°$.

故 $\triangle DAB$ 是正三角形. ………………………………………………………………………… 8 分

又因为 F 是 AB 的中点, 所以 $DF\perp AB$.

由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 得 $PA\perp DF$, 又 $PA\cap AB=A$,

所以 $DF\perp$ 平面 PAB. ……………………………………………………………………………… 9 分

所以 $DF\perp AF$, $DF\perp PF$. $\angle PFA$ 故就是二面角 $P-DF-A$ 的平面角. ………………… 10 分

设 $AF=a$, 则 $AB=2a$, $AO=\sqrt{3}a$, $AC=PA=2\sqrt{3}a$, $PF=\sqrt{a^2+(2\sqrt{3}a)^2}=\sqrt{13}a$.

故 $\cos\angle PFA=\frac{AF}{PF}=\frac{\sqrt{13}}{13}$.

故二面角 $P-DF-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{13}}{13}$. ……………………………………………… 12 分

(**20**)【解】(Ⅰ)设抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$ 与椭圆 C':$\frac{x^2}{4}+\frac{15y^2}{16}=1$ 交于 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$ $(y_1>0,y_2<0)$ 两点.

由椭圆的对称性可知, $y_1=p$, $y_2=-p$. ……………………………………………………………… 2 分

将点 $M(x_1,p)$ 代入抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$ 中, 得 $x_1=\frac{p}{2}$, ……………………………… 3 分

再将点 $M\left(\frac{p}{2},p\right)$ 代入椭圆 C':$\frac{x^2}{4}+\frac{15y^2}{16}=1$ 中, 得 $\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^2}{4}+\frac{15p^2}{16}=1$, 解得 $p=1$.

故抛物线 C 的标准方程为 $y^2=2x$. …………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)设点 $A(x_3,y_3)$, $B(x_4,y_4)$.

由题意得 $x_3\neq x_4$(否则 $\alpha+\beta=\pi$, 不满足 $\tan\theta=2$), 且 $x_3\neq 0$, $x_4\neq 0$.

设直线 OA, OB 的方程分别为 $y=kx$, $y=mx(k\neq 0,m\neq 0)$. ……………………………………… 6 分

联立 $\begin{cases}y=kx\\y^2=2x\end{cases}$ 解得 $x_3=\frac{2}{k^2}$, $y_3=\frac{2}{k}$;

联立 $\begin{cases}y=mx\\y^2=2x\end{cases}$ 解得 $x_3=\frac{2}{m^2}$, $y_3=\frac{2}{m}$; ………………………………………………………… 7 分

则由两点式得, 直线 AB 的方程为 $\frac{y-\frac{2}{m}}{\frac{2}{k}-\frac{2}{m}}=\frac{x-\frac{2}{m^2}}{\frac{2}{k^2}-\frac{2}{m^2}}$, ………………………………………… 8 分

化简得 $y=\dfrac{mk}{k+m}x+\dfrac{2}{m}-\dfrac{2k}{(k+m)m}$. ①

因为 $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$,由 $\alpha+\beta=\theta$,得 $\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\theta+\tan\beta}{1-\tan\theta\tan\beta}=\dfrac{k+m}{1-km}=2$,得 $k=\dfrac{2-m}{1+2m}$,② …… 10 分

将②代入①,化简得 $y=\dfrac{m(2-m)}{2(m^2+1)}x+\dfrac{2}{m}-\dfrac{2-m}{(m^2+1)m}$,得 $y=\dfrac{m(2-m)}{2(m^2+1)}x+\dfrac{2m+1}{m^2+1}$.

得 $y=\dfrac{m(2-m)}{2(m^2+1)m}x+\dfrac{2m-m^2+m^2+1}{m^2+1}$,

得 $y=\dfrac{m(2-m)}{2(m^2+1)}x+\dfrac{m(2-m)}{m^2+1}+1$,

得 $y=\dfrac{m(2-m)}{2(m^2+1)}(x+2)+1$,

即 $y-1=\dfrac{m(2-m)}{2(m^2+1)}(x+2)$.

令 $x+2=0$,不管 m 取何值,都有 $y=1$.

所以直线 AB 恒过定点 $(-2,1)$. …… 13 分

(**21**)【解】(Ⅰ)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, …… 1 分

$f'(x)=m+\dfrac{m}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{mx^2-2x+m}{x^2}$. …… 2 分

令 $\Delta=(-2)^2-4m^2\leqslant0$,得 $m\leqslant-1$ 或 $m\geqslant1$.

当 $m\leqslant-1$ 时,$mx^2-2x+m\leqslant0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,

此时 $f'(x)\leqslant0$,所以函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递减; …… 3 分

当 $m\geqslant1$ 时,$mx^2-2x+m\geqslant0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,

此时 $f'(x)\geqslant0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增; …… 4 分

当 $-1<m<0$ 时,方程 $mx^2-2x+m=0$ 的两根为 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}$,$x_2=\dfrac{1-\sqrt{1-m^2}}{m}$,且 $x_1<x_2$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}\right)$,$\left(\dfrac{1-\sqrt{1-m^2}}{m},+\infty\right)$ 上单调递减,

在 $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-m^2}}{m},\dfrac{1-\sqrt{1-m^2}}{m}\right)$ 上单调递增; …… 5 分

当 $0<m<1$ 时,方程 $mx^2-2x+m=0$ 的两根为 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}$,$x_2=\dfrac{1-\sqrt{1-m^2}}{m}$,且 $x_1>x_2$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{1-m^2}}{m}\right)$,$\left(\dfrac{1+\sqrt{1-m^2}}{m},+\infty\right)$ 上单调递增,

在 $\left(\dfrac{1-\sqrt{1-m^2}}{m},\dfrac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}\right)$,上单调递减. …… 6 分

当 $m=0$ 时,$f'(x)=\dfrac{-2}{x}<0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. …… 7 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,当 $m=1$ 时,函数 $f(x)-\dfrac{1}{x}-2\ln x\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, …… 8 分

则 $x\in[1,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant f(1)=0$，即 $x-\frac{1}{x}-2\ln x\geqslant 0$，$2\ln x\leqslant x-\frac{1}{x}$，即$\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)(x>1)$.

于是$\frac{\ln n}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………………………………………… 10 分

所以 $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left[n-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\right]<\frac{1}{2}\left[n-\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[n-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(n-1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n^2}{2(n+1)}$.

所以$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\cdots+\frac{\ln n}{n}<\frac{n^2}{2(n+1)}(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………………………………………… 14 分