数学(一)(理科)参考答案

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(**1**)A 【解析】由题意,$\begin{cases}2x-1>0\\1-x\geqslant 0\end{cases}$,解得$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$,$\therefore x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$.

(**2**)B 【解析】由 $z(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}=0$,得 $z=\frac{-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

(**3**)C 【解析】由于特称命题的否定是全称命题,否定方法是先改变量词,然后否定结论,故命题“存在 $x\in\mathbf{R},(-2)^x>0$”的否定是“对任何 $x\in\mathbf{R},(-2)^x\leqslant 0$”.

(**4**)C 【解析】由题意,年龄在[30,40)岁的频率为 $0.025\times 10=0.25$,则赞成修建地铁的市民有$\frac{2500}{0.25}$ 10000,故 $n=\frac{10000}{0.8}=12500$. 因为年龄在[60,70)岁的有 2000 人,则 $m=\frac{\frac{2000}{10000}}{10}=0.02$.

(**5**)D 【解析】由已知知图象关于 $x=3$ 对称,$f(x+3)$相当于图象向左平移 3 个单位,所以关于 y 轴对称,是偶函数.

(**6**)D 【解析】圆$\begin{cases}x=\cos t+1\\y=\sin t\end{cases}$($t$ 为参数)化为普通方程是$(x-1)^2+y^2=1$,点$(2,\theta)$化为直角坐标是$(2\cos\theta,2\sin\theta)$,因为点$(2\cos\theta,2\sin\theta)$到圆心$(1,0)$的距离 $d=\sqrt{(2\cos\theta-1)^2+(2\sin\theta-0)^2}=\sqrt{5-4\cos\theta}\geqslant 1$,所以点在圆上或点在圆外.

(**7**)C 【解析】因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}>0$,所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}<0$. 所以 C 为钝角. 则 A 为锐角. 所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$. 所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}<0$.

(**8**)A 【解析】由三视图可知,该三棱锥的底面是底和高分别为 $5,\frac{12}{5}$的三角形,高为$\sqrt{4^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{16}{5}$,则该三棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{16}{5}=\frac{32}{5}$.

(**9**)D 【解析】因为所有点$(s,f(t))(s,t\in[1,3])$构成一个正方形区域,所以$f_{\max}(x)-f_{\min}(x)=3-1=2$. 又 $a\geqslant 4$,则 $x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4>0$. 故$f(x)$在[1,2]上单调递减,在[2,3]上单调递增,且$f(1)=f(3)$. 故$f_{\max}(x)=f(1)=f(3)=\log_2(a-3)$,$f_{\min}(x)=f(2)=\log_2(a-4)$,则 $\log_2(a-3)-\log_2(a-4)=2$,即 $\log_2\frac{a-3}{a-4}=2$,解得 $a=\frac{13}{3}$. 故 $f(x)=\log_2\left(x^2-4x+\frac{13}{3}\right)$. 其单调增区间是$[2,+\infty)$.

(**10**)C 【解析】当数列$\{a_n\}$的公差为 0 时,不管取走哪四项,剩下三项都依然构成等差数列,则所求概率为 $P=1$;当数列$\{a_n\}$的公差不为 0 时,只有使剩下的三项等距时,才满足构成等差数列,即剩下的三项情况有:(a_1,a_2,a_3),(a_1,a_3,a_5),(a_1,a_4,a_7);(a_2,a_3,a_4),(a_2,a_4,a_6);(a_3,a_4,a_5),(a_3,a_5,a_7);(a_4,a_5,a_6);(a_5,a_6,a_7)等共 9 种;而从 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ 中取走任意四项的所有情况有 $C_7^4=35$ 种;故所求概率为 $P=\frac{9}{35}$;综上,剩下三项依然构成等差数列的概率是 1 或$\frac{9}{35}$.

二、填空题:本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

(**11**)15 【解析】$\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式常数项为 $C_6^2x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4=15$.

(**12**) $\frac{5}{3}$ 【解析】$\int_{-1}^{e}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x+\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}+\ln x\Big|_{1}^{e}=\frac{2}{3}+1-0=\frac{5}{3}$.

(**13**) 9 【解析】第一次运行时，$S=0+3=3,k=3$；第二次运行时，$S=3+3\times3=12,k=5$；第三次运行时，$S=3+3\times3+3\times5=27,k=7$；第四次运行时，$S=3+3\times3+3\times5+3\times7=48,k=9$；此时刚好不满足 $S<39$，故输出 $k=9$.

(**14**) Π_9 或 Π_{12} 【解析】在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1>0$，公比 $q<0$，故奇数项为正数，偶数项为负数，且 $a_9=4,a_{10}=-2,a_{11}=1,a_{12}=-\frac{1}{2}$. 故$\Pi_9>0,\Pi_{10}<0,\Pi_{11}<0,\Pi_{12}>0$. 故最大项只可能在$\Pi_9$ 与Π_{12}中产生. 又因为 $a_{10}a_{11}a_{12}=1$，所以$\Pi_9=\Pi_{12}$. 故数列$\{\Pi_n\}$中的最大项是Π_9 或Π_{12}.

(**15**) ①③④⑤ 【解析】对于①，因为圆的直径$|F_1F_2|=2c$，所以半径$|OM|=|ON|=c$. 故①正确；对于②，当渐近线是斜率为正的那条时，点 N 的坐标为(a,b)；当渐近线是斜率为负的那条时，点 N 的坐标为$(-a,b)$，故②错误；对于③，不妨取渐近线是斜率为正的那条，易知此时$\angle MAO=90°$，又$\angle MAN>\angle MAO$，故$\angle MAN>90°$. 故③正确；对于④，若$\angle MAN=120°$，不妨取渐近线是斜率为正的那条，则$\angle NAO=\angle MAN-\angle MAO=30°$. 由 $\tan\angle NAO=\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得$\frac{b}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故双曲线 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}$. 故④正确；对于⑤，因为$\triangle AMN$ 的面积为 $S_{\triangle AMN}=2S_{\triangle AON}=2\times\frac{1}{2}ab=ab$，所以 $ab=2\sqrt{3}$. 再由$\angle MAN=120°$及④的结论，得$\frac{b}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，解得 $a=\sqrt{3},b=2$. 故双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$. 故⑤正确.

综上，所有正确命题的编号是①③④⑤.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 解答应写在答题卡上的指定区域内.

(**16**)【解】(Ⅰ)$f(x)=\sqrt{3}\cos x\sin x+\cos^2x+\cos2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{1+\cos2x}{2}+\cos2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{3}{2}\cos2x+\frac{1}{2}=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$. ………… 4 分

故函数$f(x)$的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. ………… 6 分

(Ⅱ)由$f(B)=\sqrt{3}\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，得 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)=0$，

则 $2B+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $B=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

因为 B 是锐角，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………… 9 分

由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，即$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{a}{\sin\frac{\pi}{4}}$，解得 $a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ………… 12 分

(**17**)【解】(Ⅰ)因为甲所付租车费用大于乙所付租车费用，

当乙租车 2 天内时，则甲租车 3 或 4 天，其概率为 $P_1=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$；

当乙租车 3 天时,则甲租车 4 天,其概率为 $P_2=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{18}$;

则甲所付租车费用大于乙所付租车费用的概率为 $P=P_1+P_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}=\frac{7}{18}$. ………………… 5 分

(Ⅱ)设甲,乙两个所付的费用之和为 ζ,ζ 可为 600,700,800,900,1000. 6 分

$P(\zeta=600)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,$P(\zeta=700)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{36}$,

$P(\zeta=800)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{36}$

$P(\zeta=900)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{36}$,

$P(\zeta=1000)=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{36}$,. ……………………………………………… 8 分

故 ζ 的分布列为

ζ	600	700	800	900	1000
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

…… 10 分

故的期望为 $E(\zeta)=600\times\frac{1}{6}+700\times\frac{13}{36}+800\times\frac{11}{36}+900\times\frac{5}{36}+1000\times\frac{1}{36}=750$. 12 分

(18)【解】法一:(Ⅰ)因为 BCC_1B_1 是边长为 4 的正方形,

所以 $BC=CC_1=AA_1=4$.

因为 $\angle ACB=90^\circ$,所以 $AC\perp BC$.

又易知 $AA_1\perp$ 平面 ABC,所以 $AA_1\perp BC$.

又 $AC\cap AA_1=A$,所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1.

故 $\angle BAC$ 就是直线 AB 与平面 ACC_1A_1 所成的平面角. ……………………………………… 2 分

所以 $\tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{4}{AC}=2$. 所以 $AC=2$.

又 $BC/\!/B_1C_1$,所以 $B_1C_1\perp$ 平面 ACC_1A_1.

所以 $B_1C_1\perp CD$. ………………………………………………………………………………… 4 分

故当 $CD\perp C_1D$ 时,有 $CD\perp$ 平面 B_1C_1D,且此时有 $\triangle C_1A_1D\sim\triangle DAC$.

设 $AD=x$,则 $\frac{A_1C_1}{A_1D}=\frac{AD}{AC}$,即 $\frac{2}{4-x}=\frac{x}{2}$,解得 $x=2$.

此时 $AD=2=\frac{1}{2}AA_1$,即当点 D 为 AA_1 的中点时,$CD\perp$ 平面 B_1C_1D. ………………… 6 分

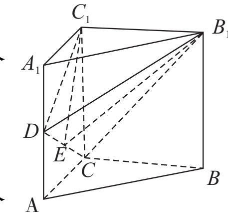
(Ⅱ)在平面 ACC_1A_1 内过点 C_1 作 $C_1E\perp CD$,交 CD 于点 E,连结 EB_1.

由(Ⅰ)可知 $B_1C_1\perp$ 平面 ACC_1A_1,故由三垂线定理可知 $B_1E\perp CD$.

故 $\angle B_1EC_1$ 为二面角 B_1-DC-C_1 的平面角. ……………………………… 8 分

当 $AD=2\sqrt{2}$ 时,$DC=2\sqrt{3}$,$S_{\triangle DCC_1}=\frac{1}{2}CC_1\cdot AC=4$,

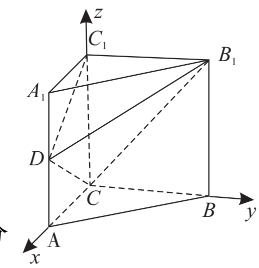
所以 $\frac{1}{2}DC\cdot C_1E=4$,解得 $C_1E=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………… 10 分



故 $\tan\angle B_1EC_1=\dfrac{B_1C_1}{C_1E}=\dfrac{4}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$. 所以 $\angle B_1EC_1=60°$.

故二面角 B_1-DC-C_1 的大小为 $60°$. ………………………………………………………………… 12 分

法二:(Ⅰ)如图所示,以 C 为原点,CA,CB,CC_1 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系.



因为 BCC_1B_1 是边长为 4 的正方形,

所以 $BC=CC_1=AA_1=4$.

因为 $\angle ACB=90°$,所以 $AC\perp BC$.

又易知 $AA_1\perp$ 平面 ABC,所以 $AA_1\perp BC$.

又 $AC\cap AA_1=A$,所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1.

故 $\angle BAC$ 就是直线 AB 与平面 ACC_1A_1 所成的平面角. …………………… 2 分

所以 $\tan\angle BAC=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{4}{AC}=2$. 所以 $AC=2$.

设 $AD=x$,则点 $C(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B_1(0,4,4)$,$C_1(0,0,4)$,$D(2,0,x)$.

所以 $\overrightarrow{C_1B_1}=(0,4,0)$,$\overrightarrow{DC_1}=(-2,0,4-x)$,$\overrightarrow{CD}=(2,0,x)$. ……………………………………………… 3 分

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=(2,0,x)\cdot(0,4,0)=0\\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DC_1}=(2,0,x)\cdot(-2,0,4-x)=0\end{cases}$,解得 $x=2$.

故 $AD=2$ 时,$CD\perp C_1B_1$,$CD\perp DC_1$. ……………………………………………………………… 4 分

又 $C_1B_1\cap DC_1=C_1$,所以 $CD\perp$ 平面 B_1C_1D.

此时 $AD=2=\dfrac{1}{2}AA_1$,即当点 D 为 AA_1 的中点时,$CD\perp$ 平面 B_1C_1D. ………………………… 6 分

(Ⅱ)若 $AD=2\sqrt{2}$,则点 D 的坐标为 $(2,0,2\sqrt{2})$,$\overrightarrow{CD}=(2,0,2\sqrt{2})$,$\overrightarrow{CB_1}=(0,4,4)$. ………… 7 分

设平面 B_1CD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}4y+4z=0\\ 2x+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$

令 $z=-1$,得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},1,-1)$; …………………………………………………………………… 9 分

又平面 C_1DC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$; ………………………………………………………… 10 分

设二面角 B_1-DC-C_1 的大小为 θ,则

$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{(\sqrt{2},1,-1)\cdot(0,1,0)}{2\times1}=\dfrac{1}{2}$,得 $\theta=60°$.

故二面角 B_1-DC-C_1 的大小为 $60°$. ………………………………………………………………… 12 分

(19)【解】(Ⅰ)$f'(x)=1-2a+2x-3x^2$,方程 $f'(x)=0$ 中的 $\Delta=4+12(1-2a)=16-24a$. ……… 1 分

当 $\Delta=16-24a\leqslant0$,即 $a\geqslant\dfrac{2}{3}$ 时,$f'(x)\leqslant0$,函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减; ……………………… 3 分

当 $\Delta=16-24a>0$,即 $a<\dfrac{2}{3}$ 时,令 $f'(x)=0$,$x_1=\dfrac{1-\sqrt{4-6a}}{3}$,$x_2=\dfrac{1+\sqrt{4-6a}}{3}$,

所以 $f'(x)=-3(x-x_1)(x-x_2)$.

当 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时,$f'(x)<0$;当 $x_1<x<x_2$ 时,$f'(x)>0$,

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{4-6a}}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{1+\sqrt{4-6a}}{3},+\infty\right)$ 内单调递减，

在 $\left(\frac{1-\sqrt{4-6a}}{3},\frac{1+\sqrt{4-6a}}{3}\right)$ 内单调递增. ………………………………………………………… 6 分

（Ⅱ）依题意，$f'(1)=1-2a+2-3=4$，解得 $a=-2$. ………………………………………………… 8 分

$f(1)=b+(1-2a)+1^2-1^3=b+5$，

又曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-f(1)=4(x-1)$，即 $y=4x+1+b$.

且已知切线方程为 $y=4x-1$，比较得 $1+b=-1$，解得 $b=-2$. ……………………………………… 10 分

故 $f(x)=-2+5x+x^2-x^3$. ……………………………………………………………………………… 11 分

由（Ⅰ）可知，函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极小值，即函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(-1)=-5$. 12 分

(20)【解】（Ⅰ）双曲线 $x^2-y^2=2$ 即为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，其离心率为 $e=\frac{\sqrt{2+2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

则椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $e'=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $(1,0)$，则椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦半径为 $c=1$.

又 $e'=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，及 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，$b=1$.

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………………………………… 4 分

（Ⅱ）因直线 l 过点 B，且斜率为 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故有 $l:y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$.

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)\end{cases}$，消去 y，得 $2x^2-2x-1=0$. ………………………………… 6 分

设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，且不妨设 $x_1<x_2$，则 $\begin{cases}x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 于是 $\begin{cases}y_1=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ y_2=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$，

又 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OH}=0$，得 $\overrightarrow{OH}=(-x_1-x_2,-y_1-y_2)$，即点 $H\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. …………………… 8 分

而点 G 与点 H 关于原点对称，于是，可得点 $G\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

若线段 MN，GH 的中垂线分别为 l_1 和 l_2，$k_{GH}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

则有 $l_1:y-\frac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，$l_2:y=-\sqrt{2}x$.

联立方程组 $\begin{cases}y-\frac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}(x-\frac{1}{2})\\ y=-\sqrt{2}x\end{cases}$，解得 l_1 和 l_2 的交点为 $O_1\left(\frac{1}{8},-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$. …………………… 11 分

因此,可算得$|O_1H|=\sqrt{\left(\frac{9}{8}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{11}}{8}$,

$|O_1M|=\sqrt{\left(x_1-\frac{1}{8}\right)^2+\left(y_1+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{11}}{8}$.

所以M,G,N,H四点共圆,且圆心坐标为$O_1\left(\frac{1}{8},-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$,半径为$\frac{3\sqrt{11}}{8}$. ………………………… 13分

(**21**)【解】(Ⅰ)函数$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$的定义域是$(-1,+\infty)$. ………………………… 2分

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-x^2=\frac{-x^3}{1+x}$,

令$f'(x)>0$,得$-1<x<0$;令$f'(x)<0$,得$x>0$;

故函数$f(x)$在$(-1,0)$上单调递增,在$(0,+\infty)$上单调递减.

故函数$f(x)$的最大值为$f(0)=0$,无最小值. ………………………… 5分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得,当$x>0$时,有$f(x)<0$,即$\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}<0$.

则$\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}<x$.

则$x\ln(1+x)+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{3}<x^2$.

令$x=\frac{1}{n}$,得$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{3n^4}<\frac{1}{n^2}$,即$a_n<\frac{1}{n^2}$. ………………………… 7分

则$a_n<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. ………………………… 9分

当$n=1$时,$S_n=a_1<1<\frac{33}{20}$;

当$n=2$时,$S_n=a_1+a_2<a+\frac{1}{4}<\frac{33}{20}$;

当$n\geqslant 3$时,$S_n=a_1+a_2+\sum\limits_{k=3}^{n}a_k<1+\frac{1}{4}+2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}++\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)<1+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$

$=\frac{33}{20}$.

综上,成立$S_n<\frac{33}{20}$. ………………………… 14分