数学(四)(文科)参考答案

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. C 【解析】$z=\frac{13}{2i+3}=\frac{13(2i-3)}{(2i)^2-9}=3-2i$,故其虚部为 -2,即 $Im(\frac{13}{2i+3})=-2$.

2. C 【解析】由题知,$A=(-\infty,1]\cup(4,+\infty)$,$B=[0,4)$,所以 $A\cap B=[0,1]$.

3. B 【解析】因为回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 必过样本中心点$(\bar{x},\bar{y})$,因此(x_0,y_0)一定满足线性回归方程,但坐标满足线性回归方程的点不一定是$(\bar{x},\bar{y})$.

4. B 【解析】$f(-\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2})=-(\frac{1}{2}+3)=-\frac{7}{2}$.

5. A 【解析】该几何体是一个底面为直角三角形的直棱柱,且底面直角三角形的两直角边分别为 1 和 2,侧棱长为 2,所以几何体的表面积为 $4+2+2\sqrt{5}+1+1=8+2\sqrt{5}$.

6. B 【解析】因为 $m=\log_a 3$,$b=\log_b 3$,由 $m<n$,得$\frac{1}{\log_3 a}<\frac{1}{\log_3 b}$,所以当 a,b 都大于 1 时,$a>b$;当 a,b 都大于 0 小于 1 时,$a>b$;当 $0<b<a<1$ 时,$m<0,n<0,m<n$ 不成立;当 $0<a<1<b$ 时,$m<0,n>0$,$m<n$ 成立.

7. C 【解析】根据程序框图输出结果分别是:$\frac{1}{2},-1,2,\frac{1}{2},-1,2$,所以周期是 3,因为$\frac{2015}{3}=671\cdots\cdots2$,所以输出结果是 C.

8. C 【解析】将点(1,1)代入不等式组$\begin{cases}mx+ny\leqslant 2\\ ny-mx\leqslant 2\\ ny\geqslant 1\end{cases}$得:$\begin{cases}m+n\leqslant 2\\ n-m\leqslant 2\\ n\geqslant 1\end{cases}$,画出$(m,n)$表示的平面区域,已知不等式组表示的平面区域是$\triangle ABC$ 的内部(含边界),m^2+n^2 表示的是此区域内点(m,n)到原点距离的平方,从图中可知这个距离的最小值是 1,最大值是 2,所以 m^2+n^2 取值范围是[1,4].

9. B 【解析】$\because DE\perp$平面 $ABCD$,$ADEF$ 为平行四边形,$\therefore FA\perp$平面 $ABCD$,$\because BD\perp CD$,$BC=2$,$\because DE=BC=2$,$\therefore FA=2$,设 $CD=x$,则 $BD=\sqrt{4-x^2}(0<x<2)$,$\therefore S_{ABCD}=CD\cdot BD=x\sqrt{4-x^2}$,$\therefore V(x)=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot FA=\frac{2}{3}x\sqrt{4-x^2}=\frac{2}{3}\sqrt{-x^4+4x^2}=\frac{2}{3}\sqrt{-(x^2-2)^2+4}$ $\because 0<x<2$,$\therefore 0<x^2<4$,$\therefore$ 当 $x^2=2$,即 $x=\sqrt{2}$时,$V(x)$取得最大值 $V(x)_{max}=\frac{4}{3}$.

10. D 【解析】若函数 $h(x)=\begin{cases}f(x),0\leqslant x<1\\ g(x),x\geqslant 1\end{cases}$,若方程 $h(x)-k=0$,$k\in\left[\frac{3}{2},2\right)$,则$\frac{1}{2}\leqslant n<1$,$ng(m)=nf(n)=n(n+1)=n^2+n=(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$,$\therefore\frac{3}{4}\leqslant ng(m)<2$.

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,请把正确的答案填在横线上)

11. 0.05 【解析】由题 $a=10$,$b=40$,$c=20$,$d=30$,$n=100$,代入 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$得 $K^2=4.762$,查看附表可得在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下认为“爱好该项运动与性别有关”.

12. $\log_2 5\sqrt{2}$ 【解析】由等比数列的性质知 $a_1a_2a_3=(a_1a_3)\cdot a_2=a_2^{\ 3}=5$, $a_7a_8a_9=(a_7a_9)\cdot a_8=a_8^{\ 3}=10$,所以 $a_2a_8=50^{\frac{1}{3}}$,所以 $a_4a_5a_6=(a_4a_6)\cdot a_5=a_5^{\ 3}=(\sqrt{a_2a_8})^3=(50^{\frac{1}{6}})^3=5\sqrt{2}$.

13. $2x-y+1=0$ 【解析】因为圆 $x^2+y^2-2y=0$ 化为标准方程是 $x^2+(y-1)^2=1$,其圆心为(0,1),半径为1,则所求直线必经过圆心;与直线 $x+2y=0$ 垂直的直线的斜率为2,故所求直线方程是 $y-1=2x$,即 $2x-y+1=0$.

14. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ 【解析】不妨设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,点 $C(x_0,y_0)$,由题意可知 $a=2$, $y_0=\sqrt{2}\sin\angle CBA=1$, $x_0=2-\sqrt{2}\cos45^\circ=1$, $\therefore \frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, $\therefore b^2=\frac{4}{3}$, $\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$, $\therefore 2c=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

15. ②④⑤ 【解析】对于①,$h(x+T)=x+2+T=h(x)+M$ 是“余数周期函数”,①错误;对于②,$f(x+1)=x+1+g(x+1)=x+1+g(x)$,故 $f(x+1)=f(x)+1$,所以②正确;对于③,$f(x-3)=x-3+g(x-3)=x-3+g(x)=f(x)-3$,故③错误;对于④,由题 $u(n+1)-u(n)=3(n\in\mathbf{N}^*)$,则数列$\{u(n)\}$为公差是3的等差数列,其通项公式为 $u(n)-u(1)=3n-3$,故④正确;对于⑤,$f(x)$的图像向右平移1个单位长度,再向上平移1个单位长度可得 $f(x-1)+1$,由②知 $f(x)=f(x-1)+1$,⑤正确.

三. 解答题:本大题共6小题,共75分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 解答应写在答题卡上的指定区域内.

16.【解析】(Ⅰ)$p=\frac{4}{40}=0.10$. 因为 a 是对应分组[15,20)的频率与组距的商,所以 $a=\frac{\frac{24}{40}}{5}=0.12$; …………………………………………………………………………………………………… 3分

(Ⅱ)因为该社区有240人,分组[10,15)内的频率是0.25,

所以估计该社区每月刷牙次数在此区间内的人数为60人; …………………………………… 6分

(Ⅲ)这个样本每月刷牙的次数不少于20次的人员共有 $4+2=6$ 人,设在区间[20,25)内的人为 a_1, a_2, a_3, a_4,在区间[25,30)内的人为 b_1, b_2. 则任选2人共有(a_1,a_2), (a_1,a_3), (a_1,a_4), (a_1,b_1), (a_1,b_2), (a_2,a_3), (a_2,a_4), (a_2,b_1), (a_2,b_2), (a_3,a_4), (a_3,b_1), (a_3,b_2), (a_4,b_1), (a_4,b_2), (b_1,b_2) 15种情况,而两人都在[25,30)内只能是(b_1,b_2)一种,所以所求概率为 $p=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$. ………… 12分

17.【解析】(Ⅰ)由$\frac{b}{a+c}=1-\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A+\sin B}$得:$\frac{b}{a+c}=\frac{a+b-c}{a+b}$,

化简即为 $b^2+c^2-a^2=bc$,再由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,

所以 $A=\frac{\pi}{3}$, $\therefore \tan=\sqrt{3}$; ………………………………………………………………………… 6分

(Ⅱ)由 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-5$ 可得 $ab\cos C=-5$,而 $b=5$,所以 $a\cos C=-1$①,

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{5}{\sin(\frac{2\pi}{3}-C)}$,即$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}$,

整理即为$\sqrt{3}a\cos C+a\sin C=5\sqrt{3}$②,将①代入②,得 $a\sin C=6\sqrt{3}$,

所以$\triangle ABC$的面积的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 5\times 6\sqrt{3}=15\sqrt{3}$. ………………………………………… 12分

18.【解析】(Ⅰ)因为$\triangle ABC$是等边三角形,所以$BD\perp AC$,又因为$AA_1\perp$底面ABC,

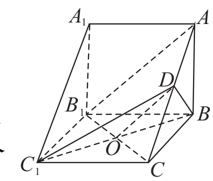
所以$AA_1\perp BD$,根据线面垂直的判定定理得$BD\perp$平面A_1ACC_1.

又因为$BD\subset$平面BDC_1,所以平面$C_1BD\perp$平面A_1ACC_1; ………………………………… 6分

(Ⅱ)证明:连接B_1C交BC_1于O,连接OD,$\because$ 四边形BCC_1B_1是平行四边形,

$\therefore$ 点O为B_1C的中点. $\because$ D为AC的中点,

$\therefore$ OD为$\triangle AB_1C$的中位线,$\therefore$ $OD /\!/ B_1A$,$OD\subset$平面BC_1D,$AB_1\not\subset$平面BC_1D,$\therefore$ AB_1 $/\!/$平面BC_1D. ……………………………………………… 12分



19.【解析】(Ⅰ)$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+10x+5$,$x\in\mathbf{R}$,则$f'(x)=x^2-7x+10$. ………………… 1分

因为a_2,a_5是函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+10x+5$的两个极值点,则$\begin{cases}a_2+a_5=7\\a_2\cdot a_5=10\end{cases}$, ……………… 3分

解得:$\begin{cases}a_2=2\\a_5=5\end{cases}$或$\begin{cases}a_2=5\\a_5=2\end{cases}$. ……………………………………………………………… 5分

又等差数列$\{a_n\}$递增,则$\begin{cases}a_2=2\\a_5=5\end{cases}$,所以$a_n=n$,$n\in\mathbf{N}^*$. ……………………………………… 6分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知:$a_n=n$,$n\in\mathbf{N}^*$且$b_n=(\frac{1}{2})^n$,$n\in\mathbf{N}^*$ ……………………………………… 7分

则$c_n=a_n\cdot b_n=n\cdot(\frac{1}{2})^n$,$n\in\mathbf{N}^*$ ……………………………………………………………… 8分

所以$T_n=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot(\frac{1}{2})^2+3\cdot(\frac{1}{2})^3+\cdots+n\cdot(\frac{1}{2})^n$① ……………………………………… 10分

$\frac{1}{2}T_n=1\cdot(\frac{1}{2})^2+2\cdot(\frac{1}{2})^3+3\cdot(\frac{1}{2})^4+\cdots+(n-1)\cdot(\frac{1}{2})^n+n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$②. …………… 11分

①-②得:$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\cdots+(\frac{1}{2})^n-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}=1-(n+2)(\frac{1}{2})^{n+1}$.

所以$T_n=2-(n+2)(\frac{1}{2})^n$,$n\in\mathbf{N}^*$. ……………………………………………………… 13分

20.【解析】(Ⅰ)由题$x\in(0,+\infty)$,$f'(x)=2x+\frac{1}{x}-a$,$\because f(x)$在$(0,1)$上是增函数,

$\therefore 2x+\frac{1}{x}-a\geqslant 0$在$(0,1)$上恒成立,即$a\leqslant 2x+\frac{1}{x}$恒成立, ……………………………… 2分

$\therefore$ 只需$a\leqslant\left(2x+\frac{1}{x}\right)_{\min}$即可,由基本不等式可得$2x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{2x\cdot\frac{1}{x}}=2\sqrt{2}$, …………… 4分

当且仅当$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号,$\therefore a\leqslant 2\sqrt{2}$; ……………………………………………………… 5分

(Ⅱ)设$e^x=t$,$\because x\in[0,\ln 3]$,$\therefore t\in[1,3]$. 设$h(t)=t^2-at-1=(t-\frac{a}{2})^2-(1+\frac{a^2}{4})$,

其对称轴为$t=\frac{a}{2}$,由(Ⅰ)得$a\leqslant 2\sqrt{2}$,$\therefore t=\frac{a}{2}\leqslant\sqrt{2}<\frac{3}{2}$, ………………………………… 8分

(1)当$1\leqslant\frac{a}{2}\leqslant\sqrt{2}$,即$2\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$时,$h(t)$的最小值为$h(\frac{a}{2})=1-\frac{a^2}{4}$,

(2)当$\frac{a}{2}<1$时,即$a<2$时,$h(t)$的最小值为$h(1)=-a$. ······························· 12 分

综上,当$2\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$时$g(x)$的最小值为$-1-\frac{a^2}{4}$,当$a<2$时$g(x)$的最小值为$-a$. ··············· 13 分

21【解析】(Ⅰ)因为$(1,\mathrm{e})$和$\left(\mathrm{e},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$为椭圆$C$:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两定点,

所以$\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{\mathrm{e}^2}{b^2}=1\\ \frac{\mathrm{e}^2}{a^2}+\frac{\frac{3}{4}}{b^2}=1\end{cases}$,整理得$\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{c^2}{a^2b^2}=1\\ \frac{c^2}{a^4}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}$,解得$a^2=2,b^2=1$,

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$; ··· 5 分

(Ⅱ)设$D(x,0)$,因为$A(0,\sqrt{2})$,$E(x_0,0)$,所以$\overrightarrow{AE}=(x_0,-\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AD}=(x,-\sqrt{2})$,

由题可知AE与AD垂直,所以有$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=x_1\cdot x_0+2=0$,$x_1=-\frac{2}{x_0}$,

又点G是点D关于原点的对称点,所以$G\left(\frac{2}{x_0},0\right)$,$k_{QC}=\frac{y_0-0}{x_0-\frac{2}{x_0}}=\frac{y_0\cdot x_0}{x_0^2+2}=\frac{x_0}{-2y_0}$, ················ 9 分

则直线QG的方程为:$y-y_0=-\frac{x_0}{2y_0}(x-x_0)$,整理得:$y=\frac{2-x\cdot x_0}{2y_0}$,

将其代入椭圆方程得:$x^2+2\left(\frac{2-x_0\cdot x}{2y_0}\right)^2=2$, ······························· 11 分

整理得:$2x^2-4x_0\cdot x+2x_0^2=0$,

所以$\Delta=(-4x_0)^2-4\cdot 2\cdot 2x_0^2=16x_0^2-16x_0^2=0$,直线$QG$与椭圆$C$只有一个公共点. ········ 13 分