

数 学(理科)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。第 I 卷第 1 至第 2 页,第 II 卷第 3 至第 4 页。全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

考生注意事项:

1. 答题前,考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的姓名、座位号。
2. 答第 I 卷时,每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
3. 答第 II 卷时,必须使用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上书写,要求字体工整、笔迹清晰。作图题可用铅笔在答题卡规定位置绘出,确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上答题无效。
4. 考试结束,务必将试题卷和答题卡一并上交。

第 I 卷(选择题 共 50 分)

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

(1) 函数 $f(x) = \ln(2x - 1) + \sqrt{1-x}$ 的定义域为

- A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ C. $(-\infty, 1)$ D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

(2) 满足 $z(1+i) + i = 0$ 的复数 $z =$

- A. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ B. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ D. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

(3) 命题“存在 $x \in \mathbb{R}, (-2)^x > 0$ ”的否定是

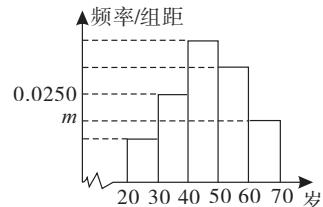
- A. “存在 $x \in \mathbb{R}, (-2)^x \leq 0$ ” B. “存在 $x \in \mathbb{R}, (-2)^x < 0$ ”
 C. “对任何 $x \in \mathbb{R}, (-2)^x \leq 0$ ” D. “对任何 $x \in \mathbb{R}, (-2)^x < 0$ ”

(4) 为了“城市品位、方便出行、促进发展”,近年合肥市正在修建地铁 1 号线,市某部门问卷调查了 n 个市民,其中赞成修建地铁的市民占 80%,在赞成修建地铁的市民中又按年龄分组,得样本频率分布直方图如图,其中年龄在 [30, 40) 岁的有 2500 人,年龄在 [60, 70) 岁的有 2000 人,则 m , n 的值分别为

- A. 0.2, 12500 B. 0.2, 10000
 C. 0.02, 12500 D. 0.02, 10000

(5) 函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 在 $x = 3$ 处取最大值,则

- A. $f(x-3)$ 一定是奇函数 B. $f(x-3)$ 一定是偶函数
 C. $f(x+3)$ 一定是奇函数 D. $f(x+3)$ 一定是偶函数



第(4)题图

(6) 以直角坐标系的原点为极点, x 轴的正半轴为极轴, 并在两种坐标系中取相同的单位长度, 已知点 M

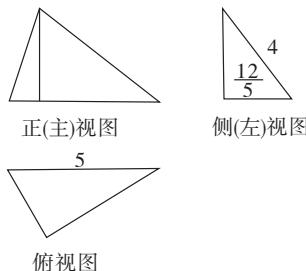
的极坐标是 $(2, \theta)$, 圆 C 的参数方程是 $\begin{cases} x = \cos t + 1 \\ y = \sin t \end{cases}$ (t 为参数), 则点 M 与圆 C 的位置关系是

- A. 在圆内 B. 在圆上 C. 在圆外 D. 在圆上或在圆外

(7) $\triangle ABC$ 中, 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} > 0$, 则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A. 大于 0 B. 等于 0 C. 小于 0 D. 符号不定

(8) 已知某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为



第(8)题图

- A. $\frac{32}{5}$ B. 24 C. 8 D. $\frac{96}{5}$

(9) 设函数 $f(x) = \log_2(x^2 - 4x + a)$ ($a > 4$), 若所有点 $(s, f(t))$ ($s, t \in [1, 3]$) 构成一个正方形区域, 则函数 $f(x)$ 的单调增区间为

- A. $[1, 2]$ B. $[2, 3]$ C. $(-\infty, 2]$ D. $[2, +\infty)$

(10) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 从 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ 中取走任意四项, 则剩下三项依然构成等差数列的概率是

- A. $\frac{6}{35}$ B. $\frac{9}{35}$ C. 1 或 $\frac{9}{35}$ D. 1 或 $\frac{6}{35}$

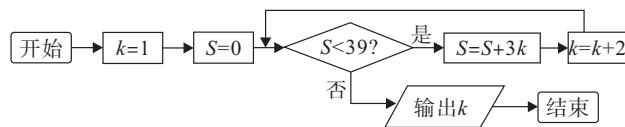
第 II 卷(非选择题 共 100 分)

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

(11) $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中的常数项为_____.

(12) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, 则 $\int_{-1}^e f(x) dx =$ _____. (e 是自然对数的底数)

(13) 执行如下图所示的程序框图, 则输出的结果是_____.



第(13)题图

(14) 等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1024$, 公比 $q = -\frac{1}{2}$, 记 $\prod_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ (即 \prod_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项

之积),则数列 $\{\Pi_n\}$ 中的最大项是_____.

- (15) 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, A 为双曲线的左顶点,以 F_1F_2 为直径的圆交双曲线的某条渐近线于 M, N 两点(M 在 x 轴下方, N 在 x 轴上方), c 为双曲线的半焦距, O 为坐标原点. 则下列命题正确的是_____ (写出所有正确命题的编号).
- ① $|OM| = |ON| = c$;
 - ② 点 N 的坐标为 (a, b) ;
 - ③ $\angle MAN > 90^\circ$;
 - ④ 若 $\angle MAN = 120^\circ$, 则双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{21}}{3}$;
 - ⑤ 若 $\angle MAN = 120^\circ$, 且 $\triangle AMN$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 则双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$.

三. 解答题:本大题共 6 小题,共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 解答应写在答题卡上的指定区域内.

(16) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos x \sin x + \cos^2 x + \cos 2x$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 A, B, C 的对边,且锐角 B 满足 $f(B) = \frac{1}{2}, A = \frac{\pi}{4}, b = 2$,求 a 的值.

(17) (本小题满分 12 分)

时下,租车已经成为新一代的流行词,租车自驾游也慢慢流行起来. 已知甲、乙两人租车自驾到黄山游玩,某小车租车点的收费标准是,不超过 2 天按照 300 元计算;超过两天的部分每天收费标准为 100 元(不足 1 天的部分按 1 天计算). 有甲乙两人相互独立来该租车点租车自驾游(各租一车一次),设甲、乙不超过 2 天还车的概率分别为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$;2 天以上且不超过 3 天还车的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$;两人租车时间都不会超过 4 天.

(I) 求甲所付租车费用大于乙所付租车费用的概率;

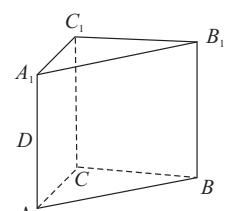
(II) 设甲、乙两人所付的租车费用之和为随机变量 ζ ,求 ζ 的分布列与数学期望 $E(\zeta)$.

(18) (本小题满分 12 分)

如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$,四边形 BCC_1B_1 是边长为 4 的正方形,直线 AB 与平面 ACC_1A_1 所成角的正切值为 2,点 D 为棱 AA_1 上的动点.

(I) 当点 D 为何位置时, $CD \perp$ 平面 B_1C_1D ?

(II) 当 $AD = 2\sqrt{2}$ 时,求二面角 B_1-DC-C_1 的大小.



第(18)题图

(19)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = b + (1 - 2a)x + x^2 - x^3$.

(I) 讨论 $f(x)$ 在其定义域上的单调性;

(II) 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 4x - 1$, 求函数 $f(x)$ 在定义域上的极小值.

(20)(本小题满分 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率与双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 的离心率互为倒数, 且以抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 为右焦点.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 过右焦点 F 作斜率为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的直线 l 交曲线 C 于 M, N 两点, 且 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OH} = 0$, 又点 H 关于原点 O 的对称点为点 G , 试问 M, G, N, H 四点是否共圆? 若共圆, 求出圆心坐标和半径; 若不共圆, 请说明理由.

(21)(本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{3n^4}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最值;

(II) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: $S_n < \frac{33}{20}$.