数学(三)(文科)参考答案

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. C 【解析】由题知 $z=\frac{\sqrt{5}}{1+i}=\frac{\sqrt{5}}{2}(1-i)=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i$,$\therefore z$ 的虚部是 $-\frac{\sqrt{5}}{2}$,故选 C.

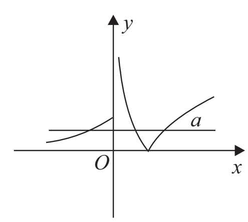
2. C 【解析】在 C 中,$\because m/\!/n, m\perp\beta$,又 $n\perp\beta, n\subset\alpha$,$\therefore \alpha\perp\beta$ 故选项 C 正确.

3. D 【解析】由题知,$\begin{cases} m>0 \\ \frac{m}{2}\geqslant 2 \\ 4-2m+11\geqslant\frac{m}{2} \end{cases}$,解得 $m\in[4,6]$,故选 D.

4. D 【解析】由题知 $e=\frac{c}{a}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{4}{a^2}}=3$,$\therefore a^2=\frac{1}{2}$,$\therefore$ 渐近线方程是 $y=\pm\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$,即 $x\pm2\sqrt{2}y=0$,故选 D.

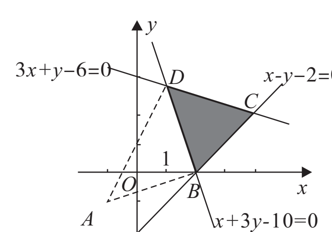
5. C 【解析】由三视图知,该几何体是由两个全等的半球和正方体组成,其中球的大圆面内切与正方体的表面,所以 $r=1$,故 $V=2^3+\frac{4}{3}\times\pi\times1^3=8+\frac{4\pi}{3}$,选 C.

6. D 【解析】作出函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x \\ (x\leqslant 0) \\ |\log_2 x|(x>0) \end{cases}$ 的图像,如图所示,若方程 $f(x)=a$ 恒有三个实数解,数形结合知,$a\in(0,1]$,故选 D.



7. D 【解析】第一次循环,$n=\frac{6}{3}+1=3$,$|6-3|=3>1$,执行第二次循环,$m=3$,$n=\frac{3}{3}+1=2$,$|3-2|=1$,执行第三次循环,$m=2$,$n=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$,$|2-\frac{5}{3}|=\frac{1}{3}<1$,跳出循环,故 $n=\frac{5}{3}$.

8. B 【解析】作出可行域,如图所示,$B(2,0)$,$C(4,2)$,$D(1,3)$,$z=\frac{x+1}{y+1}$表示可行域内点(x,y)到定点 $A(-1,-1)$的斜率的倒数,因为 $k_{AD}=\frac{3+1}{1+1}=2$,$k_{AB}=\frac{0+1}{3+1}=\frac{1}{3}$,即 $k\in[\frac{1}{3},2]$,所以 $z\in[\frac{1}{2},3]$,选 B.



9. D 【解析】由题知两圆相交,则公共弦方程是$(a_n-3)x+(a_{2015-n}-3)y=0$,$\because$ 圆 C_1 始终平分圆 C_2 的周长,故公共弦过圆 C_2 的圆心$(3,3)$,$\therefore (a_n-3)\times3-(a_{2015-n}-3)\times3=0$,即 $a_n+a_{2015-n}=6$,$\therefore S_{2014}=a_1+a_{2014}+a_2+a_{2013}+\cdots+a_{1007}+a_{1008}=1007\times6=6042$,故选 D.

10. C 【解析】由题知，$\sigma=\dfrac{\cos^2(\dfrac{\pi}{2}-x_0)+\cos^2(\dfrac{5\pi}{6}-x_0)+\cos^2(\dfrac{7\pi}{6}-x_0)}{3}$

$$=\frac{\sin^2x_0+\dfrac{1+\cos(\dfrac{5\pi}{3}-2x_0)}{2}+\dfrac{1+\cos^2(\dfrac{7\pi}{3}-2x_0)}{2}}{3}$$

$$=\frac{\sin^2x_0+1+\dfrac{1}{4}\cos2x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin2x_0+\dfrac{1}{4}\cos2x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin2x_0}{3}$$

$$=\frac{1+\sin^2x_0+\dfrac{1}{2}\cos2x_0}{3}=\frac{1+\sin^2x_0+\dfrac{1}{2}(1-2\sin^2x_0)}{3}=\frac{1}{2}$$

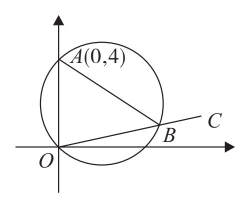
二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 5 分，请把正确的答案填在横线上)

11. $c<b<a$ 【解析】$a=0.6^{0.25}=(\frac{3}{5})^{\frac{1}{4}}$，$c=\frac{1}{2}$，$a^4=\frac{3}{5}=\frac{48}{80}$，$b^4=(\frac{3}{4})^2=\frac{45}{80}$，$c^4=\frac{1}{16}=\frac{5}{80}$，$\therefore c<b<a$.

12. 160 【解析】设第一小组的频率是 x，则由题意知，$x+\frac{5x}{3}=1$，则 $x=\frac{3}{8}$，所以 $N=\dfrac{60}{\frac{3}{8}}=160$

13. $\frac{16}{3}$ 【解析】由题知，圆的半径 $r=4$，由外接圆的特征知，圆心在 OF 的中垂线上，圆又和准线 $x=-\frac{p}{2}$ 相切，所以 $\frac{p}{2}+\frac{p}{4}=4$，所以 $p=\frac{16}{3}$.

14. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 【解析】由图知，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，则 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角，即 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\angle ABO=\frac{\pi}{3}$，点 B 在圆周上移动，当 OB 是直径时，$|\boldsymbol{b}|$ 最大，所以在 $\triangle ABO$ 中，由正弦定理得：$\dfrac{4}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R=|\boldsymbol{b}|$，即 $|\boldsymbol{b}|=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.



15. ②④ 【解析】本题考查新概念型创新题，考查学生分析转化能力，

在①中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 最小距是 $2-1=1$，故①错误.

在②中，$y'=e^x=1$ 得 $x=0$，即 $y=e^x$ 上距 $y=x$ 最近点是 $(0,1)$ 点，故 $d=\frac{|0-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故②正确.

在③中，$f(x)=\log_2(x^2-2x+5)\geqslant2$，$g(x)\leqslant1$，$\therefore f(x)$ 和 $g(x)$ 最小距离大于等于 1，故③错误.

在④中，$f(e)-g(e)=e+\frac{2}{e}-3<1$，即 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是“可及函数”，故④正确.

在⑤中，数形结合知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最小距离是 $d=\dfrac{0\times\frac{3}{4}-0+\frac{15}{4}}{\sqrt{(\frac{3}{4})^2+(-1)^2}}=1$，故 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不是“可及函数”，故⑤错，综上②④正确.

三、解答题(本大题共6小题,共75分,请写出必要的文字说明和解题步骤)

16.【解】(Ⅰ)

x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	3	0	-3	0

函数的解析式是 $f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ ………………………………………………………… 5 分

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 得,$x\in[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}]\ (k\in\mathbf{Z})$,

即函数的单调递增区间是 $[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}]\ (k\in\mathbf{Z})$ ……………………………………………… 7 分

(Ⅱ)因为 $f(B)=3\sin(2B+\frac{\pi}{6})=3$ 得:$B=\frac{\pi}{6}$,

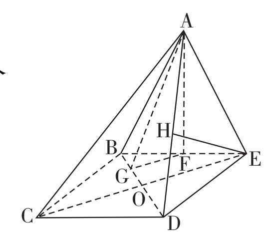
因为 $2\sin A=\sqrt{3}\sin C$,所以 $2a=\sqrt{3}c$,代入 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 得:

$a=2\sqrt{3}$,$c=4$,$b=2$,即三角形 ABC 是直角三角形, ………………………………………… 11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times ab=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$ ……………………………………………… 12 分

17.【解】(Ⅰ)当 F 是 BE 的中点时,$OF\parallel BC$,

$\because BC\subseteq$ 面 ABC,$\therefore OF\parallel$ 面 ABC. ……………………………………………… 4 分



(Ⅱ)因为 F 是中点且 $\triangle ABE$ 是等边三角形,

$\therefore AF\perp BE$,又面 $ABE\perp$ 面 $BCDE$,$\therefore AF\perp$ 面 $BCDE$,过 F 作 $FG\perp BD$,

$\because BD\perp AF$,$BD\perp FG$,$\therefore BD\perp$ 面 AFG,$\therefore BD\perp AG$,

由几何关系知,$AF=2\sqrt{3}$,$GF=\sqrt{3}$,$BG=1$,$GD=3$,

$AG=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{15}$,$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{15}=2\sqrt{15}$,

$\therefore AD=\sqrt{GD^2+AG^2}=2\sqrt{6}$,在 $\triangle AED$ 中,作 $EH\perp AD$,

$AD=\sqrt{DE^2-HD^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{10}$,

$S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times\sqrt{10}=2\sqrt{15}$,$S_{\triangle AEB}=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$,

$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$,$S_{表}=S_{\triangle AEB}+S_{\triangle BDE}+S_{\triangle AED}+S_{\triangle ABD}=8\sqrt{3}+4\sqrt{15}$. ………… 12 分

18.【解】(Ⅰ)由题知 $a=120\times 0.2=24$,$c=120\times 0.15=18$

$b=120-(24+18+22+5+15)=36$ ……………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知高一,高二,高三参赛学生分别是60,40,20人,所以高一,高二,高三抽取人数为3人、2人和1人,记高一学生为 a_1,a_2,a_3,高二学生为 b_1,b_2,高三学生为 c_1,从6名学生中随机抽选2名,共有15种可能情况列举如下 (a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,c_1),(a_2,a_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,c_1),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_3,c_1),(b_1,b_2),(b_1,c_1),(b_2,c_1) 选出来自不同年级的事件有

11 种可能结果 $n_A=11$，$\therefore P(A)=\dfrac{n_A}{N}=\dfrac{11}{15}$ ……………………………………………………… 12 分

19.【解】(Ⅰ)由题知 $f'(x)=\dfrac{-2}{x}+4mx+8-m$，$f'(2)=-1+8m+8-m=0$，解得 $m=-1$

经检验当 $m=-1$ 时，$y=f(x)$ 在 $x=2$ 处有极大值，满足题意 ………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由 $m^2<m$ 得 $0<m<1$，

$f'(x)=-\dfrac{2}{x}+4mx+(8-m)=\dfrac{4mx^2+(8-m)x-2}{x}$，即 $f'(x)=\dfrac{(4x-1)(mx+2)}{x}$，

$\because m\in(0,1)$ 且 $x>0$，$\therefore mx+2>0$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{4}$

$\therefore x\in(0,\dfrac{1}{4})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. $x\in(\dfrac{1}{4},+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

分类讨论得：当 $0<m\leqslant\dfrac{1}{4}$ 时，$x\in[m^2,m]$，$f'(x)<0$，$y=f(x)$ 单调递减，……………………… 7 分

当 $\begin{cases}m^2<\dfrac{1}{4}\\ m>\dfrac{1}{4}\\ 0<m<1\end{cases}$ 即 $m\in(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$ 时，$x\in(m^2,\dfrac{1}{4})$，$f'(x)<0$，$y=f(x)$ 单调递减，

$x\in(\dfrac{1}{4},m)$，$f'(x)>0$，$y=f(x)$ 单调递增，$\therefore f(\dfrac{1}{4})_{min}=4\ln2-\dfrac{m}{8}+2$ ……………………………… 10 分

当 $\begin{cases}m^2\geqslant\dfrac{1}{4}\\ 0<m<1\end{cases}$ 即 $\dfrac{1}{2}\leqslant m<1$ 时，$x\in[m^2,m]$，$f'(x)>0$，$y=f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(m^2)_{min}=-4\ln m+2m^5+8m^2-m^3$ ……………………………………………………………… 13 分

20.【解】(Ⅰ)由题知 $n^2+n-2S_n=0$，即 $S_n=\dfrac{n^2+n}{2}$，$n=1$ 时 $S_1=1=a_1^2$，$\therefore a_1=1$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n^2=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n^2+n}{2}-\dfrac{(n-i)^2+(n-1)}{2}=n(n\geqslant2)$，$\therefore a_n=\sqrt{n}$

综上知：$a_n=\sqrt{n}$ ………………………………………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)由题知 $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$\therefore B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1$

$\therefore mB_n+m<a_n^2+9$，$m<\dfrac{n+10}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}+\dfrac{9}{\sqrt{n+1}}$，$\because \sqrt{n+1}+\dfrac{9}{\sqrt{n+1}}\geqslant2\sqrt{9}=6$，

当且仅当 $n+1=9$，$n=8$ 时取等号，$\therefore m$ 的最大值是 5 …………………………………………… 13 分.

21.【解】(Ⅰ)设椭圆的焦距是 $2c$，所以 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 由椭圆的几何性质得，

$BF_1=a=2$，因为 $D\left(-\dfrac{8\sqrt{3}}{7},-\dfrac{1}{7}\right)$ 在椭圆 C 上，所以 $\dfrac{\left(-\dfrac{8\sqrt{3}}{7}\right)^2}{4}+\dfrac{\left(-\dfrac{1}{7}\right)^2}{b^2}=1$，解得 $b=1$，

故椭圆的方程是$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ………………………………………………………………………… 5 分.

(Ⅱ)由直线的截距式知,直线 AB 的方程是$\frac{x}{-c}+\frac{y}{-b}=1$,

联立$\begin{cases}\frac{x}{-c}+\frac{y}{-b}=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$,得$\begin{cases}x_1=\frac{-2a^2c}{a^2+c^2}\\ y_1=\frac{b(a^2-c^2)}{a^2+c^2}\end{cases}$或$\begin{cases}x_2=0\\ y_2=-b\end{cases}$,

即$A\left(\frac{-2a^2c}{a^2+c^2},\frac{b(a^2-c^2)}{a^2+c^2}\right)$,$B(0,-b)$,所以$D\left(\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}\right)$,

又因为$F_2(c,0)$,所以$\overrightarrow{DF_2}=\left(\frac{3a^2c+c^3}{a^2+b^2},\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}\right)$,

因为$F_1(-c,0)$,所以$\overrightarrow{BF_1}=(-c,b)$,因为$\overrightarrow{BA}/\!/\overrightarrow{BF_1}$,所以$BF_1\cdot\overrightarrow{DF_2}=0$,即

$(-c)\times\frac{3a^2c+c^3}{a^2+b^2}+b\times\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}=0$,化简得$a^2=5c^2$,即$\mathrm{e}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ……………………………… 13 分.